٩

بسم الله الرحمن الرحيم

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفترة الثالثة

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم
مركزالمناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
فاكس +970-2-2983250 | هاتف +970-2-2983280

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

المحتويات

النتاجات

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على توظيف النسب المثلثية والجبر وتطبيقات الحساب وكثيرات الحدود في الحياة العملية من خلال الآتي:

١ إيجاد النّسبِ المثلّثيّة الأساسيّة والثانوية للزّوايا الحادّة.

٢ التعرُّف إلى العلاقات بين النّسب المثلّثيّة.

٣ التعرُّف إلى مفهوم المتطابقة المثلّثيّة.

٤ إثبات صحّةِ متطابقةٍ مثلّثيّة .

٥ حلّ معادلةٍ مثلّثيّة .

٦ التعرّف إلى الفترات وأنواعها .

٧ تمثيل الفترات على خطّ الأعداد.

٨ التعرُّف إلى المتباينة الخطيّة بمتغيّرٍ واحدٍ، وحلّها.

٩ التعرُّف إلى المتباينة الخطيّة بمتغيريْن، وتمثيلها بيانيّاً.

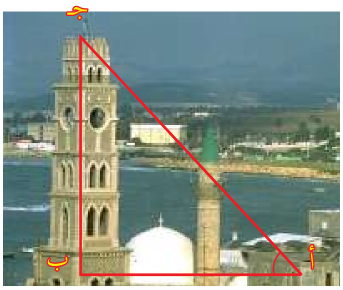
١٠ حلّ نظامٍ من المتباينات الخطيّة بمتغيريْن بيانيّاً.

١١ التعرُّف إلى كثيرات الحدود.

١٢ جمع كثيرات الحدود وطرحها.

(٣-١) النّسب المثلّثيّة

نشاط(١): برج الساعة في عكا واحد من سبعة أبراج أقيمت في فلسطين عام ١٩٠١م.
يمثّلُ الشكلُ المقابل مثلّثاً قائم الزّاوية في ب، أُكملُ ما يأتي :



١) يُسمّى الضّلعُ أ ب بالنسبة إلى الزاوية أ مجاوراً.

٢) يُسمّى الضّلعُ ب جـ بالنسبة إلى الزاوية أ: ———

٣) يُسمّى الضّلع أجـ وترَ المثلّث القائم الزّاوية، وهو أطول أضلاع المثلث.

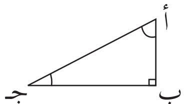
٤) جيب الزاوية أ $=$ $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

٥) جيب تمام الزاوية أ $=$ ———

٦) ظل الزاوية أ $=$ ———

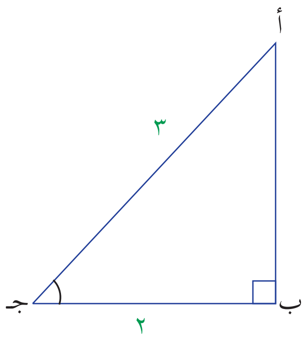
أتذكّر: النسبة بين طوليّ ضلعيْن من أضلاع المثلّث القائم الزاوية تُسمّى نسبةً مثلّثيّة.

أتذكّر: في المثلّث القائم الزّاوية تُسمّى هذه النّسبُ (جا أ، جتا أ، ظا أ) النّسبَ المثلّثيّة الأساسيّة للزّاوية الحادّة أ.



نشاط(٢): أ ب جـ مثلّثٌ قائمُ الزّاوية في ب، فيه جتا جـ $=$ $\frac{٢}{٣}$ ، أ جـ $=$ ٣ وحدات، أجدُ:

١) ظاجـ ٢) جاجـ



نرسمُ رسماً تخطيطيّاً للمثلّث أ ب جـ

جتا جـ $=$ $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $=$ $\frac{\square}{\text{أ جـ}}$ $=$ $\frac{\square}{٣}$

ومنها ب جـ $=$ ٢ وحدة ، ثمّ نعيّنُ أطوالَ الأضلاع على المثلّث

(أب)^٢ $=$ (أ جـ)^٢ $-$ (ب جـ)^٢ (لماذا ؟)

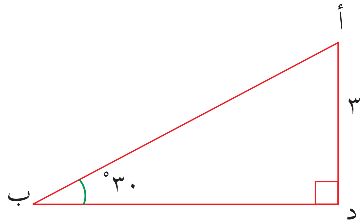
أ ب $=$ ————

ظا جـ $=$ ————

جا جـ $=$ ————

نشاط(٣): أ د ب مثلّثٌ قائمُ الزّاويةِ في د، فيه أد = ٣ وحدات، أجدُ كلٍّ من:

١) أ ب   ٢) ب د   ٣) النّسبُ المثلّثيّة الأساسيّة للزّوايا: ٣٠° ، ٦٠°



المثلّث أ د ب فيه جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

$\frac{أد}{أب} = \frac{١}{٢}$

$\frac{٣}{أب} = \frac{١}{٢}$

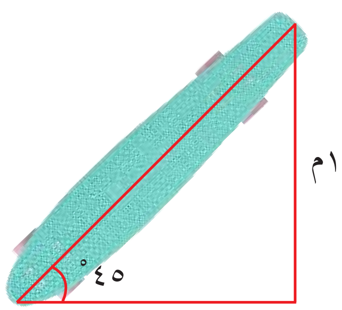
أ ب = ________

ومنها ب د = ________

جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ظا ٣٠°= ______

جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا ٦٠° = ______   ظا ٦٠° = ______

نشاط(٤): لوح للتزلج يرتفع أحد طرفيه عن الأرض ١ م، ويصنع طرفه الآخر مع الأرض زاوية قياسها ٤٥° كما في الشكل المجاور بالاعتماد على المعلومات الواردة في الشكل، أكمل إيجاد:



١) طول لوح التزلج

طول لوح التزلج = ____ م ، لأن ________

٢) النسب المثلثية الأساسية للزاوية ٤٥°

جا ٤٥° = جتا ٤٥° = ____

ظا ٤٥° = ________

أتذكّر: إذا كانت س زاوية حادّة، فإنّ:   ٠ > جا س > ١

٠ > جتا س > ١

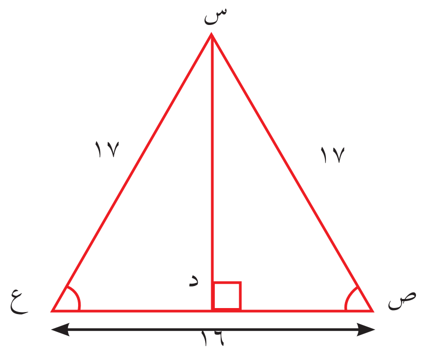
تمارين ومسائل:

س١ أجدُ قيمَ النّسبِ المثلّثيّة الأساسيّة للزّاوية الصّغرى في المثلّث أ ب جـ القائم الزاوية في ب، إذا كان أ ب = ٨ سم ، أجـ = ١٠ سم.

س٢ أ ب جـ مثلّثٌ قائم الزاوية في ب، إذا علمت أنّ جاجـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$ ، وأنّ أ ب = $\sqrt{٥}$ ، أجدُ : جتاجـ، ظاجـ

النّسب المثلّثيّة الثّانوية

نشاط(١): س ص ع مثلثٌ متساوي الساقيْن فيه: س ص = س ع = ١٧ وحدة، ص ع = ١٦ وحدة، أُكملُ إيجاد:



طول $\overline{\text{س د}}$ = ـــــــ (نظرية فيثاغورس)

$\frac{\text{س د}}{\text{س ص}} = \frac{\square}{١٧}$ ، وتمثّلُ جا ص.

$\frac{\text{س ص}}{\text{س د}}$ = ـــــــ ، وتُمثّل $\frac{١}{\text{جا ص}}$

$\frac{\text{ص د}}{\text{ص س}}$ = ـــــــ، وتُمثّل جتاص

$\frac{\text{ص س}}{\text{ص د}}$ = ـــــــ، وتُمثّل ـــــــ

$\frac{\text{س د}}{\text{ص د}}$ = ـــــــ، وتُمثّل ظا ص

$\frac{\text{ص د}}{\text{س د}}$ = ـــــــ، وتُمثّل ـــــــ

أتَعَلَّم : النّسبُ المثلّثيّة الناتجة عن مقلوبِ النسبِ المُثلّثيّة الأساسيّة تُسمّى النّسبَ المثلّثيّةَ الثانويّة، وتُعرف كما يأتي:

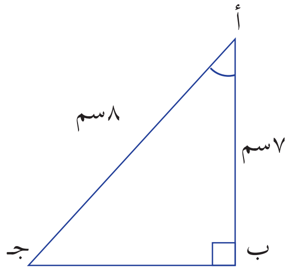
قاطع الزاوية س: قا س = $\frac{١}{\text{جتا س}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

قاطع تمام الزاوية س: قتاس = $\frac{١}{\text{جا س}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

ظلّ تمام الزاوية س: ظتا س = $\frac{١}{\text{ظا س}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

نشاط(٢) : أ ب جـ مثلّثٌ قائم الزاوية في ب، فيه أ ب = ٧ سم، أ جـ = ٨ سم، أجد:

١) قا أ ٢) قتا أ ٣) ظتا أ ٤) جا أ × قتا أ ٥) جتا أ × قا أ



نجد أوّلًا طول الضلع ب جـ : (ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} _ (أ ب)^{٢}

(ب جـ)^{٢} = ٦٤ − ٤٩ = ١٥، ومنهاب جـ = ________

١) قا أ = $\frac{١}{\text{جتا أ}}$ = $\frac{٨}{٧}$

٢) قتا أ = ______ = ________

٣) ظتا أ = ______ = ________

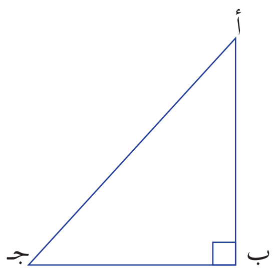
٤) جا أ × قتا أ = جا أ × ____ = ________

٥) جتا أ × قا أ = ______ = ________

ألاحظ أنّ: النسبة المثلثية × مقلوبها = ______

نشاط (٣): أ ب جـ مثلثٌ قائمُ الزاوية في ب. فيه: ∠ أ + ∠ جـ =٩٠°، ومنها:

∠ جـ = ٩٠° − ∠ أ



أُكمل إيجاد النسب المثلّثيّة، باستخدام أطوال أضلاع المثلث:

جا أ = ______ ،	جتا جـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$
جتا أ = $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$ ،	جا جـ =
ظا جـ = ______ ،	ظتا أ =
ظتا جـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ ،	ظا أ =
قا أ = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$ ،	قتا جـ =

أقارنُ بين كلِّ نسبتيْن متقابلتين، ثم أستنتج العلاقة بين النسب المثلثيّة للزاويتين : أ، (٩٠° _ أ) ؟

أتعلَّم : إذا كانت أ زاوية حادّة، فإنّ:

١) جا أ = جتا (٩٠° − أ) ، والعكس صحيح، جا الزاوية = جتا المتممة.

٢) ظا أ = ظتا (٩٠° − أ)، والعكس صحيح، ظل الزاوية = ظتا المتممة.

٣) قـا أ = قتا (٩٠° − أ)، والعكس صحيح، قا الزاوية = قتا المتممة.

نشاط(٤) : أ جـ هـ مثلّثٌ قائم الزاوية في جـ، فيه: جتا هـ = $\frac{١}{٥}$ ،

فإذا كان أ هـ = ١٠ وحدات، أجد:

١) قيم النسب المثلثيّة الأخرى للزاوية هـ .

لإيجاد باقي النسب المثلثيّة نرسم المثلث أ جـ هـ القائم في جـ، فيه: جـ هـ = ٢ وحدة،

أ هـ = ١٠ وحدات. فيكون

أ جـ = ـــــــ ، جا هـ = ـــــــ

ظا هـ = ـــــــ ، قا هـ = ـــــــ

قتا هـ = $\frac{٥}{\sqrt{٢٤}}$ ، ظتا هـ = ـــــــ

تمارين ومسائل:

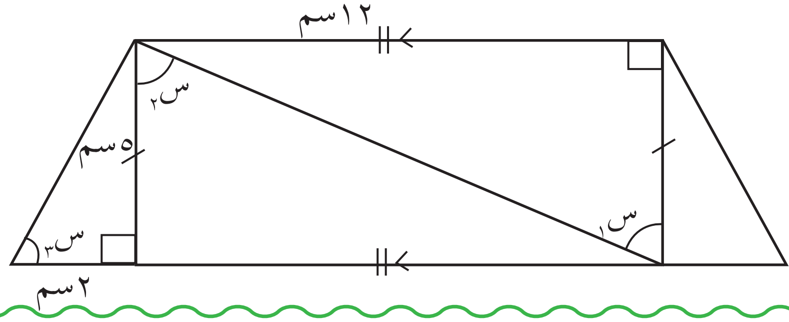
س١ س ص ع مثلّثٌ قائمُ الزاوية في ص، فيه س ص = ص ع = ٥ سم، أجدُ كلًّا من :

جتا ع، ظا ع، قا ع، قتا ع.

س٢ أ جـ هـ مثلثٌ قائمُ الزاوية في جـ، جتا (٩٠° − هـ) = $\frac{٢}{٣}$ ، أ هـ = ٣ وحدات، أجد:

جا هـ ، ظا هـ ، ظتا(٩٠° − هـ)

س٣ أجدُ النسب المثلثيّة الأساسيّة والثانويّة للزّوايا $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ في الشكل الآتي:



مهمة تقويمية (١):

س١: إذا كان جا أ = ٠,٣ ، أجدُ قيمَ النّسبِ المثلثيّة الأخرى للزاوية أ، وقيمَ النّسبِ المثلثيّة للزاوية المتمّمة لها.

س٢: احسب قيم النسب المثلثية الأخرى للزاوية هـ إذا كان ظا هـ = $\frac{١٠}{٥٠}$

س٣: أ ب هـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$ ، أجد قيم النسب المثلثية للزاوية (٩٠° - هـ).

(٣ –٣) المتطابقات المثلثيّة

نشـاط(١): هـدى وشـادي طالبـان فـي الصـفّ التاسـع فـي مدرسـة الشـهيد أبـو جهـاد الأساسـيّة، كلّفهمـا معلّـمُ الرياضيّـات بواجـبٍ بيتـيّ، وكان حـول كـونِ المعادلـة س^{٢} − ٩ = (س − ٣)(س + ٣) صحيحـةً لـكلّ قيـمِ المتغيّـر س، أم صحيحـة لبعـض قيـم المتغيّـر س. وفـي اليـوم التالـي تناقـش الطالبـان حـول ذلـك.

أيّهما كانت إجابتُه صحيحةً: هدى أم شادي؟ ولماذا؟

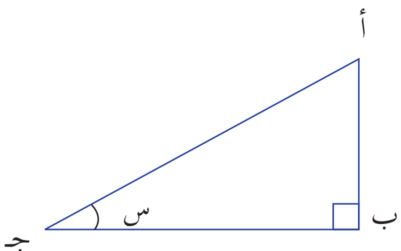
لاحظ أنّ: س^{٢} − ٩ = (س − ٣)(س + ٣) : صحيحة لـ ____________

أتعلّم : المتطابقة هي معادلة صحيحةٌ لجميع قيمِ المتغيّرات فيها.

والمتطابقة المثلثيّة هي متطابقةٌ تحوي نسباً مثلثيّة. وتكون صحيحةً لجميع قيم الزوايا الموجودة فيها.

نشاط(٢): في المثلث المجاور، أجد:

أوّلًا: العلاقة بين ظاس، جاس، جتاس



$$\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} = \frac{\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}}{\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}}$$

$$= \frac{\text{أ ب}}{\boxed{}} = \text{ظا س}$$

ثانيا: قيمة جا^{٢} س + جتا^{٢} س

جا^{٢}س = $\left(\frac{\square}{\square}\right)^{٢}$ = $\left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}\right)^{٢}$ = $\frac{\square}{\square}$

جتا^{٢}س = $\left(\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}\right)^{٢}$ = $\left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}\right)^{٢}$ = $\frac{\square}{\square}$

ومنها: جا^{٢}س + جتا^{٢}س = $\frac{\square}{\square}$ + $\frac{\square}{\square}$

= $\frac{(\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}}$ = ١ (لماذا)؟

أتعلّم: إذا كان س ص ع مثلثاً قائم الزاوية في ص، فإنّ :

١. ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

٢. جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١ (تُسمّى متطابقات مثلثيّةً أساسيّة)

وهناك كثيرٌ من المتطابقات المثلثيّة التي تُشتقُّ من المتطابقة المثلثيّة الأساسيّة السابقة منها:

- بقسمة طرفيّ المتطابقة المثلثيّة الأساسيّة الثانية على: جتا^{٢} س ، تنتجُ متطابقةٌ مثلثيّةٌ أساسيّةٌ أخرى: ظا^{٢}س + ١ = قا^{٢}س
- بقسمة طرفيّ المتطابقة نفسها على: جا^{٢}س ، نحصلُ على المتطابقة : ظتا^{٢} س + ١ = قتا^{٢} س

نشاط(٣): أُثبتُ صحّةَ المتطابقة الآتية:

$\frac{\text{جا}^{٢}\text{ هـ}}{(١ - \text{جتا هـ})}$ = ١ + جتا هـ

الطرف الأيمن : $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ هـ}}{(١ - \text{جتاهـ})}$ = $\frac{١ - \text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}{(١ - \text{جتا هـ})}$

= $\frac{(\quad)(\quad)}{(١ - \text{جتا هـ})}$

= ١ + جتا هـ (الطرف الأيسر)

لاحظ: لإثبات صحّة متطابقة بدأنا بأحد الأطراف للوصول إلى الطرف الآخر.

نشاط (٤): قام كل من علي وهبة بمحاولة اثبات صحة المتطابقة:

جتا س ظتا س = قتا س − جاس كالآتي:

(أناقش الحلّين)

طريقة علي

$$\text{جتا س ظتا س} = \text{جتا س} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$$

$$= \frac{\text{جتا}^{2}\text{ س}}{\text{جا س}}$$

طريقة هبة

$$\text{قتاس} - \text{جاس} = \frac{١}{\text{جا س}} - \text{جا س}$$

$$= \frac{١ - \text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جا س}}$$

(لكن : $\text{جا}^{2}\text{ س} + \text{جتا}^{2}\text{ س} = ١$)

$$= \frac{\text{جتا}^{2}\text{ س}}{\text{جا س}}$$

لاحظ: لإثبات صحّة متطابقة تمّ أخذ كل طرف على حدة حتى تساوى الطرفان.

تمارين ومسائل:

س١ أُثبتُ صحّةَ المتطابقاتِ الآتية:

١) $\text{جتا}^{2}\text{س} = (١ + \text{جا س})\ (١ - \text{جاس})$

٢) $\text{جتا س} + \text{جا س ظا س} = \frac{١}{\text{جتا س}}$

٣) قا س قتا س = ظا س + ظتا س

٤) $(\text{جاس} + \text{جتا س})^{2} - ٢ \text{ جا س جتا س} = ١$

س٢ أعطِ مثالاً يبيّن أنّ كلًّا ممّا يأتي ليس متطابقةً مثلثيّة:

أ) ١ − جا س = جتا س

ب) $\text{جا س جتا س} = \frac{١}{٢} \text{ جا س}$

(٣ – ٤) المعادلات المثلثيّة

تعريف

المعادلة المثلثيّة: هي معادلة تحتوي نسبةً مثلثيّةً أو أكثر، تكون صحيحةً لبعض قِيَم المتغيّر فيها.

نشاط (٢): أحلُّ المعادلاتِ المثلثيّةَ الآتيةَ:

أ) $\sqrt{٢}$ قتا س – ٢ = ٠ ، حيث: س زاوية حادة.

$\sqrt{٢}$ قتا س – ٢ = ٠

قتا س = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ = ــــــــ

جا س = ــــــــ ، إذن: س = ٤٥°

ومنها: مجموعة حل المعادلة هي {٤٥°}

ب) $\sqrt{٣}$ جا س – جتا س =٠ ، س زاوية حادّة.

$\sqrt{٣}$ جا س = ــــــــ

جا س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ جتا س (بقسمة طرفيّ المعادلة على جتا س)

ــــــــ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

س = ٣٠°، ومنها: مجموعة حل المعادلة هي {٣٠°}

ملاحظة: **حلّ المعادلة المثلثيّة**: هو إيجادُ قياسِ الزّاويةِ س التي تجعلُ المعادلة صحيحة.
مجموعة حلّ المعادلة: هي مجموعةُ القيمِ التي تجعل المعادلة صحيحةً دائماً.

نشاط(٣): أحلّ المعادلات المثلثيّة الآتية:

٢جتا^{٢} س – ٧جتا س + ٣ = ٠ ، س زاوية حادة.

أُكمل بإيجاد قيمة/ قيم س :

أ) ٢جتا^{٢} س – ٧جتا س + ٣ = ٠ ، س زاوية حادة

(٢جتا س – ــــــ) (جتا س – ٣) = ٠

إمّا ٢ جتا س – ١ = ٠ أو جتا س – ٣ = ٠

جتا س = $\frac{١}{٢}$ جتا س = ٣

س = ــــــــ مرفوضة (لماذا ؟)

ومنها: مجموعة حلّ المعادلة هي {٦٠°}

أفكر وأناقش هل كل معادلة مثلثية تمثل متطابقة مثلثية؟

تمارين ومسائل:

س١ أحلُّ المعادلاتِ المثلثيّةَ الآتية حيث س، هـ، أ، زوايا حادة :

أ (٢جا هـ − ١) (٢جتا هـ − ١) = ٠

ب ظا^{٢} س − ٢ظا س + ١ = ٠

ج ٢جا^{٢} أ − ٥جا أ + ٢ = ٠

س٢ أ ب جـ مثلثٌ قائمُ الزّاوية في ب فيه: قا أ = $\sqrt{٢}$ ، أحلُّ المعادلاتِ الآتية:

١ س جا أ − جتا أ = ٠

٢ ٢س ظتا أ − ظا أ = ٠

مهمة تقويمية (٢):

س١ أُثبتُ صحّةَ المتطابقاتِ المثلثيّة الآتية:

أ جتا^{٢} س + ظا^{٢} س جتا^{٢} س = ١

ب ١ + ظتا^{٢}(٩٠° − هـ) = قا^{٢} هـ

س٢ أحلُّ المعادلاتِ المثلثيّةَ الآتية حيث هـ ، س زوايا حادة:

أ -٢جتا هـ + ٣ = ٢

ب ٤جاس - ١ = ١

(٣ – ٥) الفترات

نشاط(١): يعد الحق في توفير التعليم المجاني من الحقوق الأساسية لكل طفل، يلتحق الأطفال في فلسطين بالصف الأول الأساسي في المدارس الحكومية والوكالة إذا كانت أعمارهم بين ٥ سنوات و٧ أشهر، و٦ سنوات و٧ أشهر، في بداية العام الدراسيّ*، إضافةً إلى الذين أعمارهم ٦ سنوات و٧ أشهر تماماً.

يمكن لأي طفل في فلسطين عمره ٦ سنوات وشهر في بداية العام الدراسي الالتحاقُ بالمدارس الفلسطينيّة الحكوميّة، أو الوكالة، لاحظ أنّ ٦ $\frac{١}{١٢}$ محصور بين العددين ٥ $\frac{٧}{١٢}$، ٦ $\frac{٧}{١٢}$.

لا يمكنُ لطفلٍ في فلسطين عمرُه ٥ سنوات الالتحاق في المدارس الحكوميّةٍ، أو مدارس الوكالة.

لاحظ أنّ: ٥ $\not\in$ {س: س $\in$ ح، ٥ $\frac{٧}{١٢}$ $<$ س $\leqslant$ ٦ $\frac{٧}{١٢}$}.

هل يمكنُ للطفل الفلسطينيّ الذي عمره ٥ سنوات و ١٠ أشهر الالتحاقُ بالمدرسة؟ ـــــ، لماذا ؟ ـــــ.

نشاط (٢):

١. أُكملُ كتابةَ المجموعات الآتية:

أ) المجموعة المُكوّنة من العددين الحقيقيّين: ١ ، ٥، وجميع الأعداد المحصورة بينهما على خطّ الأعداد = {س : س $\in$ ح ، ١ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٥}، وهي مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي تبدأ بالعدد ١ وتنتهي بالعدد ٥.

ب) المجموعة المكوّنة من العدد ١، وجميع الأعداد المحصورة بين العددين: ١ ، ٥ على خطّ الأعداد = {س: س $\in$ ح ، ـــ $\leqslant$ س $<$ ـــ }.

٢. ماذا نسمّي هذه المجموعات؟ـــــــــ

* على اعتبار أن العام الدراسي يبدأ في الأول من شهر أيلول.

أَتَعَلَّم : ليكن أ ، ب عدديْن حقيقيّيْن، بحيث: أ < ب، فإنّ مجموعةَ جميعِ الأعدادِ الحقيقيّة المحصورة بين العدديْن: أ ، ب على خطّ الأعداد، تُسمّى فترة ، ويستعمل الرمزان "[" ، "]" للدلالة على انتماء طرفي الفترة أو عدم انتمائهما إليها.

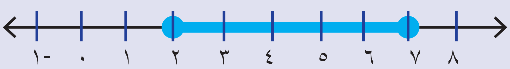
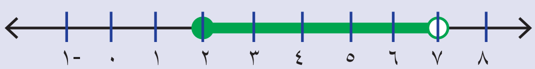
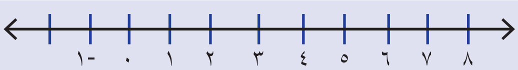
الفترات المحدودة : ليكن أ ، ب عدديْن حقيقيّيْن ، حيث: أ < ب

أنواع الفترات	الفترة بالرموز	الفترة على شكل مجموعة
المغلقة	[أ ، ب]	{س: س ∈ ح ، أ ≤ س ≤ ب}
نصف المغلقة (نصف المفتوحة)	]أ ، ب]*	{س: س ∈ ح ، أ < س ≤ ب}
نصف المغلقة (نصف المفتوحة)	[أ ، ب[**	{س: س ∈ ح ، أ ≤ س < ب}
المفتوحة	]أ ، ب[***	{س: س ∈ ح ، أ < س < ب}

يمكن التعبير عن الفترات بالكلمات مثلاً:

الفترة الثانية: تعبر عن جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من العدد أ والأقل أو يساوي العدد ب

نشاط (٣): أُكملُ كتابةَ الفتراتِ الآتيةِ كمجموعاتٍ، وأمثّلُها على خطّ الأعداد:

الفترة	الفترة على شكل مجموعة	التمثيل على خطّ الأعداد
[٢ ، ٧]	{س: س ∈ ح ، ٢ ≤ س ≤ ٧}	
[٢ ، ٧[	{س: س ∈ ح ، ٢ ≤ س < ــــ}	
]٢ ، ــ]	{س: س ∈ ح ، ــــ < س ≤ ٥}	
]٢ ، ٥[	{س: س ∈ ح ، ــــ}	

* نصف مغلقة من اليسار ** نصف مغلقة من اليمين *** يمكن كتابتها أيضاً على الصورة (أ ، ب)

الفترات غير المحدودة

ليكن أ عدداً حقيقياً ، فإنّ:

الفترة	الفترة على شكل مجموعة
[أ ، ∞[	{س: س ∈ ح ، س ≥ أ }
]أ ، ∞[	{س: س ∈ ح ، س > أ }
]-∞ ، أ]	{س : س ∈ ح ، س ≤ أ }
]-∞ ، أ[	{س: س ∈ ح ، س < أ }
]-∞ ، ∞[	{ س : س ∈ ح } = ح

يمكن التعبير عن الفترات بالكلمات مثلاً:

الفترة الأولى تعبر عن جميع الأعداد الحقيقة الأكبر من أو يساوي العدد أ

ملاحظة: الرمز ∞ يدلّ على مالانهاية في الفترات غير المحدودة.

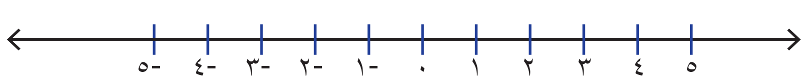
نشاط (٤) أعبّرُ عن المجموعات الآتية بفترات، وأكملُ تمثيلها على خطّ الأعداد:

١) أ = {س: س ∈ ح ، س > -٣}

أ =]-٣ ، ∞[

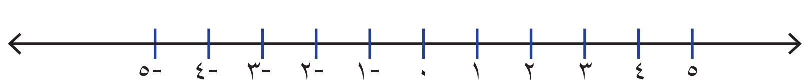
٢) ب = {س: س ∈ ح ، س ≤ ٢}

ب =]-∞ ، ——]



٣) جـ = {س : س ∈ ح}.

جـ =]—— ، ——[



تمارين ومسائل:

س١ كُتبَ على قطرةٍ للعين: "صالحة للاستخدام لمدة ٣٠ يوماً من تاريخ فتح العبوة"، أُعبّرُ عن مدة صلاحيّتها عند فتحها بفترة ، وأُمثّلُها على خطّ الأعداد.

س٢ أكتبُ المجموعات الآتية على شكل فترات :

أ) ل = {س: س ∈ ح ، ٢١ ≤ س < ٤٠٠}.

ب) جميع الأعداد الحقيقيّة التي بُعدُها عن الصّفر أقلّ من ٥ وحدات.

ج) درجات الحرارة السّالبة.

س٣ أُمثّلُ الفترات الآتية على خطّ الأعداد :

أ) [-٤ ، ٢]

ب) [-٤,٠ ، ∞[

(٣ - ٦) المتباينات الخطّيّة بمتغيّرٍ واحد

نشاط (١): يُعدُّ فقرُ الدم (الأنيميا) من المخاطرِ الصحيّة في المجتمع الفلسطينيّ، وينتجُ عن نقصِ بعضِ المُغذّيات من الفيتامينات، والعناصرِالمعدنيّة، (ويُعدُّ فقرُ الدمِ الناتجُ عن نقص الحديد هو الأكثر انتشاراً، يُعدُّ الذكرُ البالغُ مصاباً بفقر الدم إذا كان معدّلُ الهيموغلوبين في الدم أقلَّ من ١٣غم/ديسلتر*، وللأنثى البالغة أقلّ من ١٢غم/ ديسلتر، وللطّفل وللمرأة الحامل أقلّ من ١١غم/ديسلتر؛ وذلك حسب بروتوكول وزارة الصّحةِ الفِلسطينيّة، الذي يعتمدُ ما تُقرُّهُ منظّمةُ الصّحةِ العالميّة. فإذا رمزنا لنسبة الهيموغلوبين في الدم للذكر البالغ المصاب بفقر الدم بالرمز س، فيمكن التعبيرُ عنها بـ:

س<١٣، وتُسمّى متباينة. أُكمل:

هل يُعدُّ الذكرُ البالغ الذي نسبة الهيموغلوبين عنده ٩ مصاباً بفقر الدم؟______________

هل يمكنُ أنْ تكون س = ١٤؟ ______________

تعريف

المتباينةُ الخطيّةُ بمتغيّرٍ واحدٍ: هي عبارةٌ رياضيّةٌ بمتغيّر واحد، وتحوى إحدى الإشارات ≥ ، > ، ≤ ، < ، وتُكتَبُ بإحدى الصّور الآتية :

أ س + ب >٠، أ س + ب ≤٠، أ س + ب <٠، أ س + ب ≥٠.

حيث أ ، ب أعدادٌ حقيقيّة، أ ≠ صفر .

نشاط (٢): أُكوّنُ متباينةً تُعبّرُ عن كلٍّ من الجمل الآتية:

- الحدّ الأدنى لقيمة المشتريات في محلٍّ تجاريّ؛ للحصول على خصم هو ١٠٠ دينار. فإذا رمزنا لقيمة المشتريات للحاصلين على خصم بالرمز س ، يمكن التعبير عن المسألة بالمتباينة: س ≥ ١٠٠

- الحدّ الأعلى لزمن التشغيل المتواصل لخلّاطٍ منزليّ ٦٠ ثانية، شغّلتْه أمُّ عبد الله ٣٥ ثانية وما زال يعمل. أرمزُ للزمن الإضافيّ المُمكن للتشغيل م

٦٠	
٣٥	؟

فإنّ المتباينة: ٣٥ + ـــــ ≤ ـــــ.

* ١٠ديسلتر= لتر

نشاط (٣): أجدُ ناتجَ ما يأتي، وأُقارن :

٣ ، ٨ عددان حقيقيّان،   ٨ – ٣ = ــــــــ ، وهو عدداً موجباً ومنها ٨ > ٣ .

-٢ ، ٦ عددان حقيقيّان،   ٦ – ˉ٢ = ــــــــ ، وهو عدد ــــــــ ومنها ٦ ــــــــ -٢.

ماذا تلاحظ؟

تعريف	يكون العددُ الحقيقيّ أ أكبرَ من العدد الحقيقيّ ب؛ أي: أ > ب ،إذا كان أ – ب عدداً موجباً، وبالرموز أ – ب > صفر.

نشاط (٤): أضعُ إشارةَ < أو > أو = في الفراغات الآتية :

٥ < ١٢

٥ + **٣** ــــــــ ١٢ + **٣**   ،   ٥ + **-٢** ــــــــ ١٢ + **-٢**

-١ > -٤

-١ + **٢** ــــــــ -٤ + **٢**   ،   -١ + **-٦** ــــــــ -٤ + **-٦**

ماذا تلاحظ ؟ ــــــــــــــــــــــــ

أتعلّم : إذا كانت أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقيّة ، و كان أ > ب ، فإنّ :
أ + جـ > ب + جـ.

نشاط (٥): أُكمل إيجاد ما يأتي، وأضع إشارة < أو > أو = في الفراغ :

٥ < ١٢:

٥ × **٣** < ١٢ × **٣**   ،   ٥ × **-٢** ــــــــ ١٢ ×**-٢**

-١ > -٤ :

-١ × **٢** ــــــــ -٤ × **٢**   ،   -١ × **-٦** ــــــــ -٤ × **-٦**

٣٦ > -٢٤ :

٣٦ ÷ **٦** ــــــــ -٢٤ ÷ **٦**   ،   ٣٦ ÷ **-٦** ــــــــ -٢٤ ÷ **-٦**

ماذا تلاحظ ؟ ــــــــــــــــــــــــ

أتعلّم: إذا كانت أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقيّة ، فإنّه:

إذا كان أ > ب ، وكان جـ عدداً موجباً، فإنّ: أ جـ > ب جـ **و** أ/جـ > ب/جـ .

وإذا كان أ > ب ، وكان جـ عدداً سالباً، فإنّ: أ جـ < ب جـ **و** أ/جـ < ب/جـ .

العبارات أعلاه صحيحه إذا كانت الإشارة ⩾.

حلّ المتباينة: هو إيجاد قيمةٍ، أو قيمِ المتغيّر التي تجعل المتباينةَ صحيحةً عند تعويض تلك القيم فيها.

ملاحظة: مجموعةُ قيمِ المتغيّر تُسمّى مجموعةَ حلِّ المتباينة.

مِثال (١): أجدُ مجموعةَ حلّ المتباينة: ٢ س − ٢ ⩾ ٢٠ في ح ، وأُمثّلُ مجموعةَ الحلّ على خطّ الأعداد.

الحل:

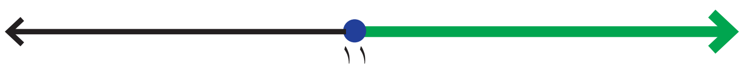
٢ س − ٢ ⩾ ٢٠

باستخدام خاصيّة الجمع للمتباينة: ٢ س − ٢ + ٢ ⩾ ٢٠ + ٢

٢ س ⩾ ٢٢

وبالقسمة على ٢ ينتج: س ⩾ ١١ ⟵ مجموعة الحل = [١١ ، ∞[،

وتُمثَّل على خطّ الأعداد:



نشاط (٧): كلّفت المعلّمةُ كلًّا من إشراق وندى حلّ المتباينة: ٢س + ٣ > ٤س + ٩ في ح .

طريقة إشراق

٢س + ٣ > ٤س + ٩

٢س + ٣ − ٣ > ٤س + ٩ -٣

٢ س > ٤س + ٦

٢س − ٤ س > ٤س +٦ -٤ س

-٢ س > ٦

س < -٣

طريقة ندى

٢س + ٣ > ٤س + ٩

٢س + ٣ − ٢س > ٤س + ٩ − ٢س

٣ > ٢س + ٩

٣ − ٩ > ٢س + ٩ − ٩

-٦ > ٢س

-٣ > س

أناقش الحلّيْن:

مِثال (٢): أجدُ مجموعةَ حلّ المتباينة: س − ١ < ٤س + ٢ ≤ ٦ ، ثمّ أُمثّلُ مجموعةَ حلّها على خطّ الأعداد.

الحل: لحلّ المتباينة: س − ١ < ٤ س + ٢ ≤ ٦ نجد تقاطعَ مجموعتيّ حلّ المتباينتيْن:

س − ١ < ٤ س + ٢ وَ ٤ س + ٢ ≤ ٦

أوّلًا: المتباينة س − ١ < ٤س + ٢

س − ٣ < ٤س (بطرح ٢ من طرفي المتباينة).

-٣ < ٣س (بطرح س من طرفي المتباينة).

-١ < س (بقسمة طرفي المتباينة على ٣).

إذن: مجموعة الحل]-١ ، ∞[

ثانياً: المتباينة ٤س + ٢ ≤ ٦

٤س ≤ ٤ (بطرح ٢ من طرفي المتباينة).

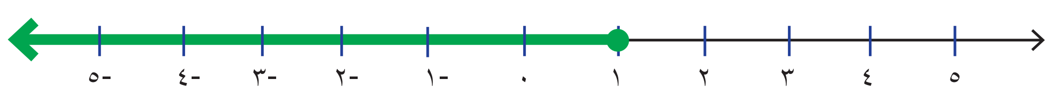
س ≤ ١ (بقسمة طرفي المتباينة على ٤).

إذن مجموعة الحل]-∞ ، ١]

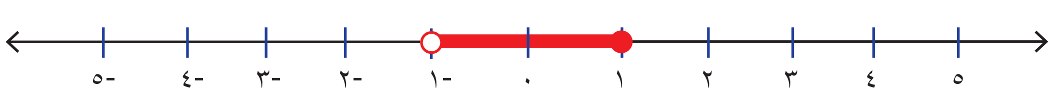
مجموعة حلّ المتباينة: س − ١ < ٤ س + ٢ ≤ ٦ هي:

]-١ ، ∞[∩]-∞ ، ١] =]-١ ، ١]،

ألاحظ التمثيل على خطّ الأعداد:



وبالتالي، فإنّ تمثيل مجموعة الحلّ هو تقاطع الفترتين



تمارين ومسائل:

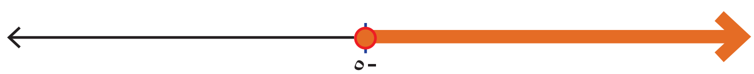
س١ أحلُّ المتباينات الآتية، وأمثّلُ مجموعة حلّها على خطّ الأعداد:

أ) س + ٣ ⩾ ٤

ب) -س - ٧ ⩾ س - ٦

جـ) ٧ ⩾ ٣ - س ⩾ ١٢

س٢ أ) أكتبُ متباينةً خطيّةً يكون حلُّها ممثّلًا بالشكل:



ب) أكتب متباينةً تمثّلُ العبارة : «طرح العدد ٧٠ من عددٍ ما، وكانت النتيجة ٥ على الأقلّ» .

مهمة تقويمية (٣):

س١ عبّرْ عن المجموعات الآتية باستخدام رمز الفترة:

* ف١ = {س:س ∈ ح، -٤ ≤ س > ٣}
* ف٢ = {س:س ∈ ح، -٢ ≤ س > ٢}

س٢ مثل الفترات الآتية على خط الأعداد:

[-١ ، ٢]   (٠ ، ٥)

س٣ أجد مجموعة حل المتباينات الآتية، وأمثل منطقة الحل على خط الأعداد:

* س - ١ > ٣
* ٣س - ٣ ≥ س - ٥

(٣ – ٧) المتباينات الخطّيّة بمتغيّريْن

نشاط (١) ضِمنَ آلياتِ تنظيمِ الأسواق في فِلَسطينَ، أقرّتْ وِزارةُ الاقتصاد الوطنيّ، ضمن الماده ١٧ من قانون حماية المستهلك قراراً بإشهار الأسعارِ على السّلع، ويُلزِمُ هذا القرارُ التّجارَ والبائعين وضْعَ الأسعارِ على السّلع. تحدّد الأسعارِ في الأسواق الفلسطينيّة في بعض الحالات الاستثنائيّة؛ حيث يتمّ وضعُ تسعيرةٍ استرشاديّةٍ لمجموعةٍ من السّلع من قِبَلِ دائرةِ حمايةِ المستهلك في المحافظات، فإذا أُصدِرَتْ استمارةُ شهرِ رمضانَ بأسعارِ مجموعةٍ من السّلعِ الغذائيّةِ الأساسيّة في إحدى المحافظات، ومنها:

النوع	دجاج مذبوح 	جبنة بلديّة 
السعر (كغم)	٤ دنانير	٥ دنانير

فإذا رصدت سميرة ٣٠ ديناراً لشراء دجاجٍ، وجبنةٍ بلديّة ، فوجدت أنّ كيلوغرام الدّجاج يُباعُ في أحد المحالّ التجاريّة بأربعة دنانير، ويُباعُ كيلوغرام الجبنة بخمسة دنانير، فإذا رمزنا لكتلة الدّجاج س كغم، ولكتلة الجبنة ص كغم. أُعبّرُ عن المسألة بمتباينةٍ:

٤س + ـــــ ≤ ٣٠

لاحظ أنّ: س ≥ ٠ و ص ≥ ٠

هل تستطيع سميرة شراءَ ٤ كيلوغرام دجاج، و٣ كيلوغرام جبنة ؟ ______________

إذا التزم التاجرُ بالأسعار الاسترشاديّة التي حدّدتْها دائرةُ حماية المستهلك في المحافظة، هل سيكون باستطاعتها شراءُ ٤ كيلوغرام دجاج و ٣ كيلوغرام جبنة ؟ ________________

أتعلّم: المتباينة الخطيّة بمتغيّريْن: هي عبارة رياضيّةٌ فيها متغيّران، وإحدى الإشارات > ،≥، < ، ≤، وتُكتَبُ بإحدى الصّور الآتية :

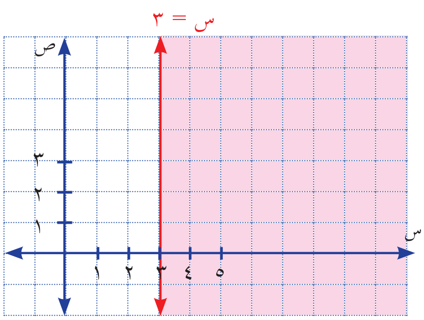
أ س + ب ص + جـ > ٠ ، أ س + ب ص + جـ ≥ ٠

أ س + ب ص + جـ < ٠ ، أ س + ب ص + جـ ≤ ٠

حيث: أ ، ب ، جـ أعدادٌ حقيقيّة و أ ، ب ≠ صفراً.

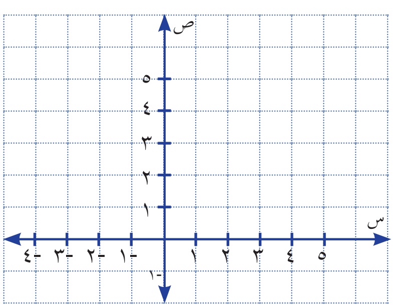
مِثال (١): أكتبُ مجموعةَ حلّ المتباينة: س ≤ ٣، وأُمثّلُها على خطّ الأعداد ، ثمّ أُمثّلُها في المستوى الديكارتي .

الحل: مجموعة حلّ المتباينة: س ≤ ٣ = [٣ ، ∞[، وتُمثّل على خطّ الأعداد:



ولتمثيل مجموعة حلّ المتباينة: س ≤ ٣ في المستوى الديكارتي، نرسم الخطّ المستقيم س = ٣ الذي يقسم المستوى إلى منطقتيْن، إحداهما تمثّلُ مجموعة الحل، نظلّل منطقة حلّ المتباينة س ≤ ٣ كما في الشكل .لاحظ أنّ الإحداثي السّيني للنقاط الواقعة ضمن منطقة الحل يُحقّق س ≤ ٣، أُمثّل موقع النقطة (٥ ، ١) .

نشاط (٢): أمثّل مجموعة حلّ المتباينة: ٢س -٣ ص ≤ -٦ في المستوى الديكارتي.



أرسم الخطّ المستقيم ٢س – ٣ص = -٦

لتحديد منطقة الحلّ، أُعوّضُ إحداثيّات نقطةٍ لا تقع على الخط المستقيم المرسوم في المتباينة، ولتكنْ (١، ٠) :

٢×١ – ٣×٠ = ٢ ≤ -٦ . ماذا تلاحظ؟ ——

أظلّلُ المنطقة التي تمثّل مجموعة الحلّ على الرسم.

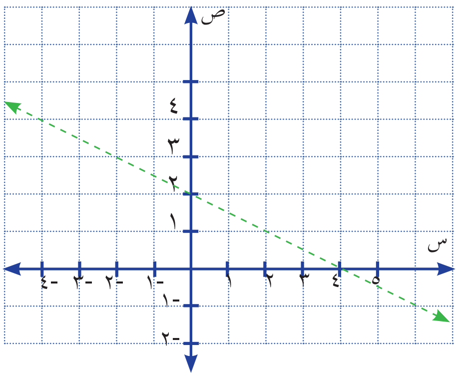
أكتبُ زوجاً مرتّباً ينتمي إلى مجموعة الحل:————————

أكتبُ زوجاً مرتّباً لا ينتمي إلى مجموعة الحل:————————

نظام المتباينات : هو أيُّ مجموعةٍ من المتباينات.

والمنطقة التي تمثّل حلَّ النظام هي المنطقة التي تُحقّقُ جميع المتباينات فيه.

نشاط (٣): أحدد المنطقة التي تمثل حل النظام الآتي في المستوى الديكارتي:



س + ٢ص < ٤

س ⩾ ١

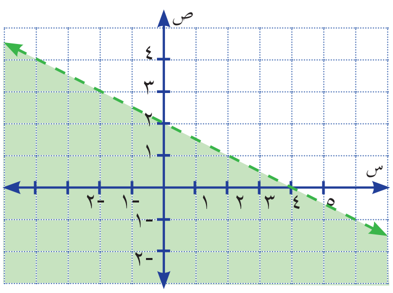
ص ⩾ -١

أُمثّلُ مجموعة حلّ المتباينة: س+٢ص < ٤ :

أرسمُ الخطّ المستقيم: س + ٢ص = ٤ ، لاحظ أنّ الخطَّ متقطع.

أُحدّدُ منطقة حلّ المتباينة: س+ ٢ص < ٤ باختيار زوجٍ مرتّبٍ، مثل: (١ ، ٠) والتعويض فيها:

١ + ٠ = ١ < ٤



أي أنّ: النقطة (١ ، ٠) ضمن منطقة الحلّ .

أُظلّل منطقة حلّ المتباينة: س + ٢ص < ٤ باللون الأخضر.

١) أُمثّل مجموعة حل المتباينة س ⩾ ١ :

أرسم الخط المستقيم س = ١

ثمّ أحدد منطقة حل المتباينة س ⩾١، باختيار زوجٍ مرتّبٍ مثل:(،)، والتعويض فيها.

أظلّلُ منطقة حل المتباينة س ⩾ ١ بلونٍ آخر.

٢) أُمثّلُ مجموعة حل المتباينة ص ⩾ -١ :

أرسم الخط المستقيم ــــــــــــــــــ

أحدّدُ منطقة حل المتباينة: ص ⩾ -١

أظلّلُ منطقة حل المتباينة ــــــــــــ بلونٍ مختلفٍ عن اللونيْن السابقيْن.

وبهذا تكون المنطقة الواقعة ضمن مجموعة حلّ كلِّ متباينةٍ في النظام، هي التي تمثّلُ مجموعة حل النظام.

تمارين ومسائل:

س١ أُمثّلُ بيانيّاً مجموعة حلّ كلِّ متباينة من المتباينات الآتية :

١ ص $\leqslant$ -٢

٢ ٣س − ٢ ص $<$ ٦

٣ ٢,٥ $<$ س $<$ ٤

س٢ أجدُ بالرسم في المستوى الديكارتي المنطقة التي تمثّلُ حلَّ نظامٍ المتباينات الآتية:

أ

ص $\leqslant$ -٢

ص $\geqslant$ ٣ − س

٢س + ٤ص $\geqslant$ ٤

(٣- ٨) كثيرات الحدود

نشاط(١): تستخدم البنوك خدمة الصراف الآلي على نطاق واسع وذلك للتسهيل على المواطن في التعاملات البنكيّة.

يحتوى الصرّافُ الآليّ صناديقَ من فئةِ العملات المتداوَلَة، دينار ، دولار،... ، فإذا كانت س = ١٠ نستطيع التعبيرُ عن الحركات الآتية من الصرّاف الآلي: ١٠، ٨٠ ، ١٠٠، ٣٠٠، بالمقادير الجبريّة:

س ، ٨س ، $س^{٢}$ ، $٣س^{٢}$، على التوالي

أمثّلُ مجموعَ حركاتِ الصرّاف الآلي بالرموز: ________________.

تعريف

الاقتران كثير الحدود* على ح: هو اقترانٌ معرَّفٌ على ح، ويتكوّنُ من حدٍّ، أو مجموعِ حدودٍ جبريّةٍ عِدّة، وتكون فيه أُسُسُ المتغيّر أعداداً صحيحةً غيرَ سالبة. ونُعبّرُ عن كثير الحدود بـ:

$$ق(س) = أ_{ن} س^{ن} + أ_{ن-١} س^{ن-١} + أ_{ن-٢} س^{ن-٢} + \text{........} + أ_{٢} س^{٢} + أ_{١} س^{١} + أ_{٠}$$

حيث: $أ_{٠}$ ، $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، ....$أ_{ن}$ أعدادٌ حقيقيّةٌ، وتُسمّى معاملاتُ كثيرِ الحدود ق(س) ، ن عدداً صحيحاً غيرَ سالب.

ملاحظة: درجة كثير الحدود هي أكبرُ أُسٍّ للمتغيّر فيه.

* يمكن تعريف كثير الحدود على أي مجموعة جزئية من ح.

نشاط(٢): أُكمل:

١) ق(س) = ٢س^{٥} − ١٥س + ٩ : اقترانٌ كثيرُ حدود من الدرجة الخامسة؛ لأنّ: الأسس صحيحة غير سالبة، وأكبر أسٍّ فيه هو ٥ .

٢) ق(س) = ٦س − س$^{\frac{١}{٣}}$: ليس اقتراناً كثيرَ حدود؛ لأنّ الأسّ $\frac{١}{٣}$ عدد غير صحيح .

٣) ق(س) = س − س$^{\frac{٢}{٥}}$ − س^{٧} + ٢س^{٥} + ٤س^{٦} − ٩: ـــــــــــــــــــــــ.

٤) ق(س) = ٣ : اقترانٌ ثابتٌ، وهو كثيرُ حدود من الدرجة الصفريّة؛ لأنّه يمكن كتابتُه على صورة: ق(س) = ٣س^{٠}.

٥) ق(س) = πس^{٢} − س$^{\frac{٣}{٤}}$ + ١ : ـــــــــــــــــــــــ.

٦) ق(س) = ٤س + ١ : ـــــــــــــــــــــــ.

٧) ق(س) = ٣س^{٢} + ٥س − ٤ : ـــــــــــــــــــــــ.

تعريف

يتساوى كثيرا الحدود، إذا كان لهما الدرجةُ نفسُها، وكانت معاملاتُ قُوى س المتناظرة متساويةً.

نشـاط(٣): إذا كان: ق(س) = ٣س^{٢} + ب س + جـ ، هـ(س) = أس^{٢} + ٣ س + $\sqrt{٣}$ ،
وكان ق(س) = هـ (س) ، أُكمل إيجاد:

أ = ٣ ، ب = ــــــ ، جـ = ــــــ

نشاط(٤): ليكن: ق(س) = ٢س + ٤

- هل ق(س) كثير حدود؟ ــــــــــ
- إذا كان ق(س) = صفر

فإنّ: ٢س + ٤ = ٠

٢س = ــــــ

س = -٢

نُسمّي العدد (-٢) صفراً للاقتران ق؛ لأنّ: ق(-٢) = صفر ، أتحقّق من ذلك.

أتعلّم: إذا كان ق(س) اقتراناً، وكان ق(م) = صفراً، فإنّ العدد م يُسمّى صفراً للاقتران ق(س).

أُفكّر وأُناقش

هل ق(س) = س + $\frac{٥}{س^{-٤}}$ كثير حدود؟ ولماذا؟

تمارين ومسائل:

س١ أُبيّنُ أيَّ الاقترانات الآتية تمثّل كثيرَ حدود، ثمّ أكتبُ درجةَ كثيرِ الحدود فيها:

أ) ق(س) = ٢س^{٢} − ٥س + ١

ب) ق(س) = س^{٢} − ٥س^{٣} − ٧ + ٣س^{٩} − ٢س

جـ) ق(س) = ٥س + س$^{\frac{٢}{٥}}$

س٣ أجد أصفار الاقترانات الآتية:

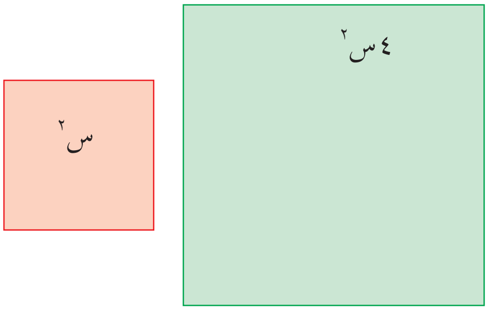
أ) ق(س) = ٣ − ٧س

ب) ق(س) = س^{٢} + ٥س − ١٤

جـ) ق(س) = س^{٢} − ٤

(٣ – ٩) جمعُ كثيراتِ الحدودِ وطرحُها

نشاط(١): تنتشر لعبةُ كرةِ الطائرةِ في فلسطين، ومن أجل تطوير اللعبة يعمدُ الاتّحاد الفلسطينيّ إلى توفير قاعاتٍ لأنديةِ الدرجة الممتازة، طُلب إلى مهندسٍ عملُ تخطيطٍ داخلَ القاعة، لغرفِ ملابس اللاعبين؛ ويمكن تمثيلها بالأشكال الآتية، فرسم المهندس غرفتين، مِساحةُ إحداهما أربعة أضعاف مِساحة الأخرى.



مجموع مساحتيْهما: ــــــــــــ

الفرق بين مساحتيْهما: ــــــــــــ

مجموع محيطيْهما: ــــــــــــ

أَتَعَلَّم: اذا كان ق(س) = $أ_{ن}\,س^{ن} + أ_{ن-١}\,س^{ن-١} + \ldots\ldots + أ_{٢}\,س^{٢} + أ_{١}\,س^{١} + أ_{٠}$

فإن جـ ق(س) = $جـ\,أ_{ن}\,س^{ن} + جـ\,أ_{ن-١}\,س^{ن-١} + \ldots\ldots + جـ\,أ_{٢}\,س^{٢} + جـ\,أ_{١}\,س^{١} + جـ\,أ_{٠}$

أوّلاً: جمع كثيرات الحدود:

تعريف

ليكن: ق(س) ، هـ(س) كثيري حدود، **فإنّ: (ق + هـ)(س) كثير حدود**، بحيث:

(ق + هـ)(س) = ق(س) + هـ(س)

نشاط(٢): ليكن ق(س) = $٣س^{٢} + ٥س - ١$ ، هـ(س) = $٢س^{٢} - ٢س$ ،

أُكمل إيجاد:

(ق + هـ)(س) = ق(س) + هـ(س) = ($٣س^{٢} + ٥س - ١$) + ($٢س^{٢} - ٢س$)

= ($٣س^{٢} + ٢س^{٢}$) + ($٥س - ٢س$) − ١

= $٥س^{٢}$ + ــــــــ − ــــــ

لاحظ أنّ: (ق + هـ)(س) هو اقتران كثير حدود من الدرجة ــــــــــــ .

أَتَعَلَّم: ناتجُ جمعِ كثيري حدود هو كثيرُ حدود، درجته أقلّ، أو تساوي أعلى درجتيّ الاقترانين.

ثانياً: طرح كثيرات الحدود:

تعريف

ليكن: ق(س)، هـ(س) كثيري حدود، **فإنّ: (ق − هـ)(س) كثير حدود**، بحيث:

(ق − هـ)(س) = ق(س) − هـ(س)

نشاط(٣) إذا كان ق(س) = ٧س^{٢} + ٥س − ١ ، هـ(س) = ٢س^{٢}− ٢س + ٧ ، أُكمل إيجاد:

١) (ق − هـ)(س) = ق(س) − هـ(س) = (٧س^{٢} + ٥س − ١) − (٢س^{٢} − ٢س + ٧)

= (٧س^{٢} − ٢س^{٢}) + (٥س + ______) +(-١ − ٧)

= ٥س^{٢} + ______ − ______

لاحظ أنّ: (ق − هـ)(س) هو اقتران كثير حدود من الدرجة ______ .

٢) ٣ق(س) = ٣ × (   )

= ٢١س^{٢} + _____ − _____

أُفَكِّر وأُناقش

ما درجة ناتج طرح كثيري حدود؟

تمارين ومسائل:

س١ إذا كان: ق(س) = ٦س^{٣} + ٥س^{٢} − ١، هـ(س) = ٣س^{٢} + س + ٤

ك(س) = ٢س^{٢} − ٤، اقتراناتٍ كثيرةَ الحدود، أجد ما يأتي :

أ (ق + هـ)(س) ب (هـ − ك)(س)

جـ (ق + ك)(-١) د هـ(س) − ٤ق(س)

س٢ ليكن :

- ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة
- هـ(س) كثير حدود من الدرجة الرابعة
- ك(س) كثير حدود من الدرجة الخامسة

فما درجة كلٍّ ممّا يأتي؟

أ (ق + هـ)(س) ب (ق − ك)(س) جـ (ق + هـ + ك) (س)

مهمة تقويمية (٤):

س١ أجدُ بالرسم في المستوى الديكارتي المنطقة التي تمثّلُ حلَّ نظامٍ المتباينات الآتية:

ص > ١ ، س ⩽ ١

س٢ إذا كان الاقترانان: ق (س) = (أ - ١) س^{٣} + ٢ س^{٢} + (ج + ١)

ك(س) = (ج + ٢) س^{٣} + أ س^{٢} + هـ - ٢ متساويين، أحسبُ قيمة أ، ج، هـ.

س٣ اذا كان ق(س) = ٦س^{٢} + ٥س ، هـ(س) = ٣س^{٢} + س + ٤، ك(س) = ٢س^{٣} +٦ اقترانات كثيرة حدود، فأوجد ما يأتي، وحدد درجة الناتج:

أ) هـ(س) - ٤ ك(س) ب) (ق + ك) (س)

س١ أضعُ دائرةً حول رمزِ الإجابة الصّحيحة فيما يأتي:

١ ما قيمة المقدار $\frac{\text{جتا س قتا س}}{\text{ظا س}}$ ؟

أ) ظتا س　　ب) قتا س　　جـ) ظتا^{٢} س　　د) قتا^{٢} س

٢ إذا كانت س زاويةً حادة، وكان جاس = جتا(س + ٢٠°)، فما قياسَ الزّاوية س ؟

أ) ٣٠°　　ب) ٣٥°　　جـ) ٥٠°　　د) ٢٠°

٣ ما قيمة جا^{٢} ٣٠° + جتا^{٢} ٣٠° ؟

أ) صفر　　ب) ١　　جـ) $\frac{١}{٢}$　　د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٤ ما قيمةُ المقدار المكافئ لـ: جا^{٢} س + ظا^{٢} س جا^{٢} س ؟

أ) ظا س　　ب) قا^{٢} س　　جـ) ظتا^{٢} س　　د) ظا^{٢} س

٥ ما الفترة التي تمثّل المجموعة: {ع : ع ∈ ح ، ع^{٢} ⩽ ٤ }؟

أ)]٤ ، ∞[　　ب) [-٢ ، ٢]　　جـ)]-∞ ، ٢]　　د)]٠ ، ٢]

٦ إذا كانت ص ∈]-٧ ، ٥[فما قيمة ص ؟

أ) -٧　　ب) ٥　　جـ) صفر　　د) ١٢

٧ أيّ الاقترانات الآتية يُعدُّ اقتراناً كثير حدود:

أ) س + $\frac{\text{س}}{٨}$ − س^{٥}　　ب) $\frac{٣}{\text{س}^{٦}}$ − ٨　　جـ) ٥ $\sqrt{\text{س}}$ + ١　　د) ٢س$^{-٣}$ + ٧

س٢ أُثبتُ صحّةَ المتطابقاتِ المثلثيّة الآتية:

أ $\frac{\text{ظا}^{٢}\text{ س}}{١ + \text{ظا}^{٢}\text{ س}}$ = جا^{٢} س

ب $\frac{\text{جا س جتا س}}{\text{ظا س}} + \frac{\text{ظا س}}{\text{قتا}^{٢}\text{ س ظا س}}$ = ١

س٣ أحلُّ المعادلة المثلثيّة الآتية:

أ ٢جتا^{٢} هـ − ٥جتا هـ + ٢ = ٠ ، حيث هـ زاوية حادة

س٤ أُمثّلُ مجموعة حلّ النظام الآتي في المستوى الديكارتي:

س > -١

ص ⩽ ٣,٥

ص − س ⩾ ٢

س٥ إذا كانت ق(س) = س^{٣} − ٥س^{٢} + ٣، هـ(س) = س^{٢} +١ ، أجد:

أ ق(س) + ٢هـ(س)　　**ب** ٤ق(س) − هـ(س)　　**جـ** (ق + هـ)(٣)

س١ ضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) أحد الاقترانات الآتية كثيرة حدود:

أ) ق(س) = س^-٢ + ٥ ب) ق(س) = س^٣+٤س ج) ق(س) = س + √س د) ق (س) = ١/س^٢

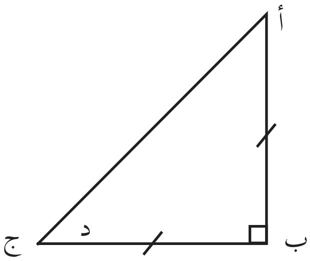
٢) أصغر عدد صحيح يحقق المتباينه ١ > ٣ - ٢س هو:

أ) صفر ب) -١ ج) ١ د) ٢

٣) إذا كانت المجموعة: س = {أ : أ ∈ ح، ٣ ≤ س < ٤} فما صورة تلك المجموعة على شكل فترة؟

أ) [٤ ،٣[ب)]٤ ،٣] ج) [٤ ،٣] د)]٤ ، ٣[

٤) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، فيه أ ب = ب ج ما قيمة √٢ جا أ + ٢ظا أ؟



أ) ٢ ب) ٣

ج) √٢ + ٢ د) ٤

٥) إذا كانت ج زاوية حادة، بحيث إنّ: ظا ج = ٣/٤ ، ما قيمة قا ج؟

أ) ٥/٢ ب) ٥/٣ ج) ٥/٤ د) ١

٦) ما قيمة المقدار قتا٣٠°/قا٦٠° - ظتا٤٥°؟

أ) صفر ب) √٣ - ١ ج) ١/(√٣ - ١) د) -١/٢

س٢: إذا كان الاقترانان ق(س) = س^٤ + س^٢ + س + ١، هـ(س) = (س^٢ + أ) (س^٢ - ١) + ب س + ج وكان ق(س) = هـ(س) احسب: أ، ب، ج.

س٤: أثبت صحة المتطابقة: قا٢س + قتا٢س = ١/(جا^٢س + جتا^٢س)

س٥: حل نظام المتباينات الخطية الآتي بيانياً

ص ≤ ٢ س + ٦

ص + ٣ س ≥ -١

س ٦ : أجد صفر الاقتران الآتي:

أ ق(س) = س^٢ + ٥س − ١٤