٨

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الصف الثامن

الفترة الثالثة

مركز المناهج

حي المصايون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250

المحتويات

٣-١ حل المعادلة التربيعية بالتحليل ١
٣-٢ حل المعادلة التربيعية بطريقة إكمال المربع ٣
٣-٣ حل المعادلة التربيعية باستخدام القانون العام ٦
٣-٤ تحليل الفرق بين مكعبين و مجموع مكعبين ٩
٣-٥ حل معادلتين خطيتين بمتغيرين ١١
٣-٦ متوازي الأضلاع ١٥
٣-٧ القطاع الدائري و القطعة الدائرية ١٧
٣-٨ الأسطوانة ٢١
٣-٩ المخروط ٢٤

النِّتاجاتُ

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف حلّ المعادلات التربيعيّة، وتحليل مجموع وفرق بين مكعبين والهندسة والقياس في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١- التعرّف إلى الصّورة العامة للمعادلة التربيعيّة.
٢- حلّ المعادلة التربيعيّة بطرقٍ مختلفة.
٣- التعرُّف إلى مجموع وفرق مكعّبيْن.
٤- تحليل مجموع وفرق بين مكعبيْن.
٥- استخدام حلّ المعادلة التربيعيّة، والتحليل في حلّ مسائلَ حياتيّة.
٦- إيجاد مساحة متوازي الأضلاع، بدلالة مِساحة المثلّث المشترِك معه في القاعدة والارتفاع.
٧- التعرّف إلى القطاع الدائري وخصائصه.
٨- إيجاد مِساحة القطاع الدائري، وطول قوس القطاع الدائري، وزاوية القطاع الدائري.
٩- التعرّف إلى القطعة الدائريّة.
١٠- التعرّف إلى الأسطوانة الدائريّة القائمة.
١١- إيجاد المِساحتيْن الجانبيّة والكليّة والحجم للأسطوانة.
١٢- التعرُّف إلى المخروط الدائري القائم.
١٣- إيجاد المساحتيْن الجانبيّة والكليّة والحجم للمخروط.
١٤- توظيف المساحات والحجوم في حلّ مشكلاتٍ حياتيّة.

١-٣ حل المعادلة التربيعيّة بالتحليل

تعريف: المعادلة التربيعيّة: هي المعادلة التي يمكن كتابتها على الصورة
أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، حيث: أ، ب، جـ ∋ ح، أ ≠ ٠.*
وتُسمّى قيمُ س التي تحقّق المعادلة، حلولَ (جذور) هذه المعادلة.

نشاط١: أحدّدُ المعادلة التربيعيّة في كلٍّ ممّا يأتي، وأوضّح السبب:

أ) ٣س^{٢} − ٤س + ١ = ٠ معادلة تربيعيّة؛ لأنّها تحقّق الصورة العامة.

ب) س + ١ = ٠ ليست معادلة تربيعيّة، (لماذا؟)

جـ) س(س − ١) = ٢ .....

د) $\sqrt{٣ س^{٢}}$ = ٤ .....

خاصيّة(١): لأيّ عددَيْن حقيقيّيْن أ، ب، إذا كان أ × ب = ٠، فإنّ أ = ٠، أو ب = ٠، أو كليهما يساوي صفر.

نشاط٢: أكمل إيجاد قيمة س في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) (س + ٥)(س − ١) = ٠

إمّا: س + ٥ = ٠، ومنها: س = -٥ أو : س − ١ = ٠، ومنها: س = ...

ب) (٨ − ٢س)(س + ٢) = ٠ إمّا: س + ٢ = ٠ ، ومنها: س = ...

أو : ٨ − ٢س = ٠ ، ومنها: -٢س = -٨ ، ومنها: س = ...

نشاط٣: أكمل حلّ المعادلات الآتية:

أ) ٥س^{٢} + ٣س = ٠ أحلّلُ العبارة التربيعيّة، فينتج أنّ: س(٥س + ٣) = ٠ (لماذا؟)

إمّا س = ٠ ، أو ٥س + ٣ = ٠، ومنها: س = $\frac{-٣}{٥}$

ب) س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠

* الأعداد الحقيقية (ح) تشمل الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية.

أحلّل العبارة التربيعيّة، فينتج أنّ: (س – ٢)(س – ٣) = ٠

إمّا: س – ٢ = ٠، ومنها: س = ٢ أو : س – ٣ = ٠، ومنها: س = ...

جـ) ٥س^{٢} + ١٣س – ٦ = ٠

أحلّل العبارة التربيعيّة، فينتج أنّ: (٥س – ٢)(س + ٣) = ٠

إمّا: ٥س – ٢ =٠، ومنها: س = $\frac{٢}{٥}$ أو: س + ٣ = ٠، ومنها: س = ...

أتعلّم: يمكن أحياناً حلّ المعادلة التربيعيّة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، عن طريق التحليل ومن ثم استخدام الخاصية (١).

نشاط٤:

أُكمل حلّ المعادلات التربيعيّة الآتية:

أ) س^{٢} = ٧ أكتب المعادلة على الصورة العامّة، فتصبح س^{٢} – ٧س = ٠

ومنها : س (س – ٧) = ٠ (لماذا؟)

إمّا: س = ٠ ، أو: س – ٧ = ٠ ، ومنها: س = ...

ب) س^{٢} – ٥ = ٤س أكتب المعادلة على الصورة العامّة، فتصبح: س^{٢} – ٤س – ٥ = ٠

ومنها: (س – ٥)(س + ١) = ٠ (لماذا؟)

إمّا: س – ٥ = ٠، ومنها : س = ... أو: س + ١ = ٠، ومنها: س = ...

نشاط٥:

عددان زوجيّان متتاليان، حاصل ضربهما ١٦٨، فما هذان العددان؟

أفرض أن العدد الأوّل س، فيكون العدد الثاني س + ٢

س (س + ٢) = ١٦٨، س^{٢} + ٢س = ١٦٨ (لماذا؟)

س^{٢} + ٢س – ١٦٨ = ٠ (لماذا؟)، (س + ١٤)(س – ....) = ٠

إمّا: س + ١٤ = ٠، ومنها: س = ...، أو: س – ١٢ = ٠، ومنها: س = ...

إذا كانت س = -١٤، فإنّ العدد الزوجي التالي له -١٢. (لماذا؟)

إذا كانت س = ١٢، فإنّ العدد الزوجي التالي له ..... (لماذا؟)

تمارين ومسائل:

١) أيّ من المعادلات الآتية تربيعيّة؟

أ) $س^{٢} - ٤س + ١ = ٠$

ب) $س(س^{٢} - ٢) = ٠$

جـ) $(\sqrt{٢}س - ١)^{٢} = ٠$

د) $س + ٣ = ٢س + ٢$

٢) أحلُّ المعادلات التربيعيّة الآتية:

أ) $(٥ - ٢س)(س + ١) = ٠$

ب) $س^{٢} - ٦س + ٥ = ٠$

جـ) $٩س^{٢} - ٩ = ٠$

د) $س^{٢} + ٨س = ٢٠$

هـ) $-س^{٢} + ٦س + ١٦ = ٠$

مهمة تعليمية:

يعد التبريد أحد طرق حفظ الأطعمة، ويعطى عدد البكتيريا في الأطعمة المبردة لكل غرام بالمعادلة ع = $٢٠ر^{٢} - ٢٠ر + ١٢٠$، حيث ر تمثل درجة الحرارة التي تحفظ بها الأطعمة. ماهي درجة الحرارة التي يكون عندها عدد البكتيريا ١١٥ في الغرام الواحد؟

٣-٢ حلّ المعادلة التربيعيّة بطريقة إكمال المربّع

لحلّ المعادلة التربيعيّة المكتوبة على صورة مربّعٍ كاملٍ، يمكن استخدامُ التعريف الآتي:

تعريف: إذا كان $س^{٢} = ك$، $ك \geq ٠$ ، فإنّ $س = \pm\sqrt{ك}$ ، يُسمّى $\sqrt{ك}$ الجذر التربيعيّ الموجب للعدد س، ويُسمّى $-\sqrt{ك}$ الجذر التربيعيّ السالب للعدد س.

نشاط ١:

أكمل حلّ المعادلات الآتية:

أ) $س^{٢} = ٢٥$ ، $س = \pm\sqrt{٢٥}$، ومنها: $س = \pm ٥$

ب) $(س - ٤)^{٢} = ٨١$ ، $س - ٤ = \pm ٩$ (لماذا؟)

إما: $س - ٤ = ٩$، ومنها: $س = ...$ أو: $س - ٤ = -٩$، ومنها: $س = -٩ + ٤ = ...$

جـ) $(س - ٢)^{٢} - ٤٩ = ٠$ ، $(س - ٢)^{٢} = ٤٩$

$س - ٢ = \pm ٧$ (لماذا؟)

إما: $س - ٢ = ٧$، ومنها: $س = ٩$ (لماذا؟) أو: $س - ٢ = -٧$، ومنها: $س = ...$

قد يتعذر أحياناً استخدامُ طريقة التحليل إلى العوامل في حلّ المعادلات التربيعيّة، فيتم اللجوء إلى كتابة المعادلة بالصورة (س ± هـ)^{٢} = ك، ك > ٠، هـ عدد حقيقي باستخدام طريقة إكمال المربّع؛ وذلك بإضافة ($\frac{\text{معامل س}}{٢}$)^{٢} إلى طرفيّ المعادلة، **عندما يكون معامل س^{٢} = ١**

مثال١: أحلُّ المعادلة التربيعيّة: س^{٢} + ٦س − ٢ = ٠ أكتب المعادلة على الصورة: س^{٢} + ٦س = ٢ أجد: ($\frac{\text{معامل س}}{٢}$) = ($\frac{٦}{٢}$) = (٣)

أضيفُ مربّعه إلى طرفيّ المعادلة، فينتج: س^{٢} + ٦س + (٣)^{٢} = ٢ + (٣)^{٢}

س^{٢} + ٦س + ٩ = ٢ + ٩

(س + ٣)^{٢} = ١١ (ألاحظ أنّ الطرف الأيمن أصبح مربّعاً كاملاً) (س + ٣) = ± $\sqrt{١١}$

إمّا: (س + ٣) = $\sqrt{١١}$ ، ومنها: س = $\sqrt{١١}$ − ٣

أو: (س + ٣) = - $\sqrt{١١}$ ، ومنها: س = - $\sqrt{١١}$

نشاط٢: أكمل حلّ المعادلات الآتية:

أ) س^{٢} − ١٠س + ٢٥ = ١١ ألاحظ أنّ: ١٠ = ٢ × ٥

(س − ٠٠٠٠)(س − ٥) = ١١ ، (س − ٠٠٠٠)^{٢} = ١١

(س − ٠٠٠٠) = ± $\sqrt{١١}$ ، ومنها: س = ٥ ± $\sqrt{١١}$ (لماذا؟)

ب) ص^{٢} + ٣ص − ١٠ = ٠ أكتب المعادلة على الصورة ص^{٢} + ٣ص = ١٠

أجد ($\frac{\text{معامل ص}}{٢}$) = ($\frac{٣}{٢}$)، وأضيف مربّعه إلى طرفيّ المعادلة، فتصبح:

ص^{٢} + ٣ص + ($\frac{٣}{٢}$)^{٢} = ١٠ + ($\frac{٣}{٢}$)^{٢} ، ومنها ص^{٢} + ٣ص + $\frac{٩}{٤}$ = ١٠ + $\frac{٩}{٤}$

ص^{٢} + ٣ص + $\frac{٩}{٤}$ = ٠٠٠٠ ، ومنها (ص + $\frac{٣}{٢}$)^{٢} = $\frac{٤٩}{٤}$

(ص + $\frac{٣}{٢}$) = ± $\frac{٧}{٢}$ (لماذا؟)

إما: (ص + $\frac{٣}{٢}$) = $\frac{٧}{٢}$ ، ومنها: ص = $\frac{٧}{٢}$ − $\frac{٣}{٢}$ = ٠٠٠٠

أو: (ص + $\frac{٣}{٢}$) = $\frac{-٧}{٢}$ ، ومنها: ص= $\frac{-٧}{٢}$ − $\frac{٣}{٢}$ = ٠٠٠٠

نشاط٣:

أجدُ حلّ المعادلة ٢س^{٢} + ٥س − ٣ = ٠.

أقسمُ جميع الحدود على ٢ لأجعل (معامل س٢ = ١)، فتصبح المعادلة بالصورة:

س^{٢} + $\frac{٥}{٢}$ س − $\frac{٣}{٢}$ = ٠ أكتب المعادلة على الصورة س^{٢} + $\frac{٥}{٢}$ س = $\frac{٣}{٢}$

أجد: $\left(\frac{\text{معامل س}}{٢}\right)^{٢}$ = $\frac{٥}{٤}$ (لماذا؟) أضيف مربعه إلى طرفيّ المعادلة، فتصبح:

س^{٢} + $\frac{٥}{٢}$ س + $(\frac{٥}{٤})^{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ + $(\frac{٥}{٤})^{٢}$ ، ومنها س^{٢} + $\frac{٥}{٢}$ س + $\frac{٢٥}{١٦}$ = $\frac{٣}{٢}$ + $\frac{٢٥}{١٦}$

س^{٢} + $\frac{٥}{٢}$ س + $\frac{٢٥}{١٦}$ = $\frac{٤٩}{١٦}$ ، ومنها (س+ ...)^{٢} = $\frac{٤٩}{١٦}$

(س + $\frac{٥}{٤}$) = ± $\frac{٧}{٤}$ (لماذا)؟

إما: (س + $\frac{٥}{٤}$) = $\frac{٧}{٤}$ ، ومنها: س = $\frac{٧}{٤}$ − $\frac{٥}{٤}$ = ...

أو: (س + $\frac{٥}{٤}$) = $\frac{-٧}{٤}$ ، ومنها: س = $\frac{-٧}{٤}$ − $\frac{٥}{٤}$ = ...

تمارين ومسائل:

١) أحلُّ كلًّا من المعادلات الآتية:

أ) س^{٢} − ٣٦ = ٠

ب) (س + $\frac{١}{٣}$)^{٢} = $\frac{٤}{٩}$

جـ) س^{٢} + ٨س + ١٦ = ١٣

د) ٣س^{٢} − ٥ = ٠

٢) أستخدم طريقة إكمال المربع لأجد جذور المعادلات الآتية:

أ) ص^{٢} − ٥ص = -٤

ب) س^{٢} + ٨س + ٤ = ٠

جـ) س^{٢} + ٣س + ٢ = ٧

د) ٧س + ٣ = س^{٢}

هـ) -٢س^{٢} − ٣س + ١ = ٠

مهمة تعليمية:

إذا كانت المِساحة (س) التي يغطّيها جهاز العرض الضوْئي على حائط، تُعطى بالمعادلة:
س = ٠,١٦ ف^{٢}، حيث: ف تمثل البعد الأفقي بين جهاز العرض والحائط.
ما البعد عن الحائط الذي يجب أنْ يوضع عليه جهاز العرض، حتى تكون المساحة على الحائط ٤م^{٢}؟

٣-٣ حلّ المعادلة التربيعيّة باستخدام القانون العام

تعريف: يُسمّى المقدار ب^{٢} – ٤ أ جـ مميّزَ المعادلة التربيعيّة:
أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر، ويُحدّدُ مميّز المعادلة التربيعية عدد الحلول (الجذور) لتلك المعادلة.

نشاط ١: أكمل إيجاد المميز، وجذور المعادلة: س^{٢} + ٥س + ٤ = ٠ (إنْ أمكن)

أ = ١، ب = ٥، جـ = ٤

المميز = ب^{٢} – ٤ أ جـ = ٥^{٢} – ٤ × ١ × ٤ = ٢٥ – ١٦ = ٩؛ أي أنّ: المميز موجب.

لإيجاد جذور المعادلة س^{٢} + ٥س + ٤ = ٠ ، أحلّل العبارة فتصبح: (س + ٤)(س + ١) = ٠

إمّا: س + ٤ = ٠ ، ومنها: س = ... أو: س + ١ = ٠، ومنها: س = ...

ألاحظ أنّ المميز موجب، وأن للمعادلة التربيعية جذرين مختلفين.

أتعلّم: إذا كان مميّز المعادلة التربيعيّة (أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر) موجباً، فإنّ لهذه المعادلة جذرين حقيقيّين مختلفيْن.

نشاط ٢: أكمل إيجاد المميّز وجذور المعادلة: ٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩ = ٠

أ = ٤، ب = ١٢، جـ = ٩

المميز = ب^{٢} – ٤ أ جـ = (١٢)^{٢} – ٤ × ٤ × ٩ = ١٤٤ – .... = ٠

لإيجاد جذور المعادلة: ٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩ = ٠

أحلّل العبارة التربيعية فتصبح المعادلة بالصورة: (٢ص + ٣)^{٢} = ٠ (لماذا؟)

إمّا: ٢ص + ٣ = ٠ ، ومنها: ص = ...

أو : ٢ص + ٣ = ٠ ، ومنها: ص = ...

ألاحظ أنّ جذريّ المعادلة التربيعيّة متساويان.

أتعلّم: إذا كان مميّز المعادلة التربيعيّة (أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠) يساوي صفر، فإنّ لهذه المعادلة جذراً واحداً مكرراً.

نشاط٣:

أكمل إيجاد المميّز وجذور المعادلة: س^{٢} − ٢س + ٣ = ٠

أ = ١، ب = -٢، جـ = ...

المميّز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٤ − ٤( )( ) = -٨ (لماذا؟)

* أحلّ المعادلة بإكمال المربع، فينتج أنّ: س^{٢} − ٢س = -٣

ومنها: س^{٢} − ٢س + ١ = -٣ +١

: (س − ...)^{٢} = -٢ ، : (س − ...) = ± $\sqrt{-٢}$

لكن $\sqrt{-٢}$ عدد غير حقيقيّ؛ أي: أنّه لا يوجد حلّ في مجموعة الأعداد الحقيقيّة.

أتعلّم: إذا كان مميّز المعادلة التربيعيّة (أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر) سالباً، فلا يوجد لها جذور حقيقيّة (لا يوجد لها حلّ في مجموعة الأعداد الحقيقيّة).

نشاط٤:

أكمل إيجاد مميّز المعادلات الآتية، وأبيّنُ عدد جذورها:

أ) ٣س^{٢} − ٥س + ٤ = ٠، أ = ٣، ب = -٥، جـ = ٤

المميّز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = (-٥)^{٢} − ٤ × ٣ × ٤ = ٢٥ − ٤٨ = ...

وبما أنّ المميّز سالب، فإنّ عددَ جذور المعادلة يساوي .....

ب) ٤س^{٢} − ٤س + ١ = ٠ ، أ = ٤، ب = -٤، جـ = ...

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = (-٤)^{٢} − ٤ × ٤ × .... = ...

وبما أنّ المميّز ..... ، فإنّ عددَ جذورِ المعادلة يساوي .....

جـ) -٣ص^{٢} − ٤ص − ١ = ٠ ، أ = ... ، ب = ... ، جـ = -١

المميّز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = (...)^{٢} − ٤ × (-٣)(-١)

= ١٦ − ١٢ = ...

وبما أنّ المميّز موجب، فإنّ عددَ جذور المعادلة يساوي .....

تعريف: يمكن إيجاد جذور المعادلة التربيعيّة المكتوبة بالصورة:
$أ\ س^{٢} + ب\ س + جـ = ٠$، $أ \neq ٠$. (إنْ أمكن حلها) باستخدام القانون العام

$$س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

نشاط ٥:

أكمل حلّ المعادلة التربيعيّة الآتية، مستخدماً القانون العام:

$٢,٥ س + ١,٥ = س^{٢}$ ، ومنها $س^{٢} - ٢,٥ س - ١,٥ = ٠$

$٢ س^{٢} - ٥ س - ٣ = ٠$ (لماذا؟)

$أ = ٢$، $ب = ...$ ، $جـ = -٣$

ومنها: المميّز $= (-٥)^{٢} - ٤ (...) (...)$

$$= ٢٥ + ٢٤ = ...$$

$$س = \frac{(٥) \pm \sqrt{(-٥) - ٤٩}}{٢ \times ...}$$

$$٧ \pm (٥)$$

ومنها: $س = \frac{\quad}{٤}$ إمّا: $س = ...$ ، أو: $س = ...$

تمارين ومسائل:

١) أجد مميّز كلٍّ من المعادلات الآتية، وأحدّدُ عدد جذورها:

أ) $٥ س^{٢} + ٣ س = -١$ ب) $٤ = ١٣ س - س^{٢}$ جـ) $٤٠ ص = ٢٥ + ١٦ ص^{٢}$

٢) أستخدم القانون العام لحلّ كلٍّ من المعادلات الآتية (إنْ أمكن):

أ) $٢ ص^{٢} + ١ = ٦ ص$ جـ) $س^{٢} + ٦ س = ١٦$

ب) $٤ س^{٢} - ١٢ س = -٥$ د) $٦ س^{٢} + ١١ = -٢٥ س - ١٠$

٣) ما قيمة ك التي تجعل جذريّ المعادلة: $٣ س^{٢} - ٦ س + ك = ٠$، متساويين؟

مهمة تعليمية:

يسدد لاعبو كرة السلة كراتهم نحوى المرمى بمسار يمكن تمثيله بالمعادلة: $ع = -٩ س^{٢} + ٨١ س + ٥$ حيث ع تمثل ارتفاع الكرة بالمتر بعد س ثانية. أحسب الزمن اللازم لتكون الكرة على ارتفاع ٣م.

٤-٣ تحليل الفرق بين مكعبيْن ومجموع مكعبين

نشاط ١: أُكمل إيجادَ ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

أ) (س − ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤) = س (س^{٢} + ٢س + ٤) − ٢(س^{٢} + ٢س + ٤)

= س^{٣} + ٢س^{٢} + ٤س − ٢س^{٢} − ٤س − ...

= س^{٣} − ٨

ب) (٢س − ص) (٤س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢})

= ٢س (٤س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢}) − ص (٤س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢})

= ٨ س^{٣} + ... + ٢س ص^{٢} − (٤ س^{٢}ص + ... + ص^{٣})

= ٨س^{٣} + ٤س^{٢}ص + ٢س ص^{٢} − ٤س^{٢}ص − ٢س ص^{٢} − ص^{٣}

= ٨س^{٣} − .... ماذا تلاحظ؟

أتعلّم: يُسمّى المقدار الجبري أ^{٣} − ب^{٣} فرقاً بين مكعبين، ويتمّ تحليلُه؛ وفقاً للقاعدة:
أ^{٣} − ب^{٣} = (أ − ب) (أ^{٢} + أ ب + ب^{٢})

نشاط ٢: أكملُ تحليلَ المقادير الجبريّة الآتية:

١) س^{٣} − ٢٧ = س^{٣} − (٣)^{٣} = (س − ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)

٢) أ^{٣} − ١٢٥ = أ^{٣} − (....)^{٣} = (أ − ٥)(أ^{٢} + ٥أ + ...)

٣) ٨ − ٦٤س^{٣} = (٢)^{٣} − (٤س)^{٣}= (.... − ٤س)(٤ + ٨س + ...)

٤) ١٢٥س^{٣} − ٨ص^{٣} = (٥س)^{٣} − (٢ص)^{٣}

= (٥س − ....) (٢٥س^{٢} + ١٠س ص + ٤ص^{٢})

٥) ٨ أ^{٣} − ٣٤٣ = (٢أ)^{٣} − (٧)^{٣} = (٢أ − ٧)(٤أ^{٢} + ١٤أ + ...)

تعريف: يُسمّى المقدار الجبري أ^{٣} + ب^{٣} مجموعَ مكعّبيْن، وتم تحليلُه وفقاً للقاعدة: أ^{٣} + ب^{٣} = (أ + ب) (أ^{٢} − أ ب + ب^{٢}).

نشاط ٣:

أكملُ تحليلَ المقادير الجبريّة الآتية:

أ) $ص^{٣} + ٦٤ = ص^{٣} + (٤)^{٣} = (ص + ٤)(ص^{٢} - ٤ص + ١٦)$

ب) $م^{٣} + ٨ = م^{٣} + (٢)^{٣} = (م + \cdots)(م^{٢} - ٢م + \cdots\cdots)$

جـ) $٨أ^{٣} + ٣٤٣ = (٢أ)^{٣} + (٧)^{٣} = (٢أ + ٧)(\cdots\cdots - ١٤أ + \cdots\cdots)$

د) $س^{٣} + ١ = (س + \cdots\cdots)(س^{٢} - \cdots\cdots + \cdots\cdots)$

تمارين ومسائل:

١) أكتبُ كلًّا من الآتية في أبسط صورة:

أ) $(٣س - ١)(٩س^{٢} + ٣س + ١)$

ب) $(ل - \frac{١}{٤})(ل^{٢} + \frac{١}{٤}ل + \frac{١}{١٦})$

جـ) $(ن^{٢} - ١)(ن^{٤} + ن^{٢} + ١)$

٢) أحلّل المقادير الآتية إلى عواملها الأوليّة:

أ) $س^{٣} - ٦٤$

ب) $٢١٦س^{٣} - ٨$

جـ) $\frac{٢٧}{١٢٥} - س^{٣}$

د) $٢ل^{٣} - ١٦$

ز) $ع^{٣} + ١$

ل) $٢٧ + ٦٤ك^{٣}$

هـ) $\frac{٢١٦}{ب^{٣}} + ١$

و) $٣ع^{٣} + ١٩٢$

٣) أستخدم تحليل الفرق بين مكعبين ومجموع مكعبين في إيجاد قيمة كلٍّ من الآتية:

أ) $(\frac{٢}{٣} - \frac{٥}{٦})((\frac{٢}{٣})^{٢} + \frac{٢}{٣} \times \frac{٥}{٦} + (\frac{٥}{٦})^{٢})$

ب) $(٧ - ٥)(٧^{٢} + ٧ \times ٥ + ٥^{٢})$

جـ) $(٢٠ - ١٧)(٢٠^{٢} + ٢٠ \times ١٧ + ١٧^{٢})$

هـ) $(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣})(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٦} + \frac{١}{٩})$

و) $(\frac{١}{٢})^{٣} + (\frac{٣}{٤})^{٣}$

٤) إذا كان $س = ص + ٤$، $س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٤٩$، فما قيمة $س^{٣} - ص^{٣}$؟

٣-٥ حلّ معادلتَيْنِ خَطِّيَّتَيْنِ بمتغيرين

تعريف: تُسمّى عمليّةُ إيجادِ جميعِ قيمِ س الّتي تحقّقُ المعادلةَ عمليّةَ حَلِّ المعادلة، وتُسمّى مجموعةُ قيمِ س الّتي تحقّق المعادلةَ مجموعةَ الحلِّ للمعادلة.

أوّلاً- حلّ معادلتَيْنِ خَطِّيَّتَيْنِ بطريقة التَّعويض:

يمكن حلّ معادلتَيْنِ خَطِّيَّتَيْن بمتغيرَيْنِ بطريقة التَّعويض، من خلال الخطوات الآتية:

- أختارُ إحدى المعادلتَيْنِ، ثم أجعَلُ أحد المتغيرين فيها موضوعاً للقانون*.
- أُعوّضُ قيمة المتغير موضوع القانون في المعادلة الأُخرى.
- أَحُلُّ المعادلة النّاتجة الّتي تضم متغيراً واحداً.
- أُعوّضُ قيمة هذا المتغير النّاتجة في إحدى المعادلتَيْنِ لأجد قيمة المتغيّر الثّاني.

نشاط ١:

أُكْمِلُ حلّ المعادلتَيْنِ الآتيتين بطريقة التَّعويض:

- ٢س + ٣ص = ١٦ .....(١) - ٣س – ص = ٢ .....(٢)

أجعل ص موضوع القانون في المعادلة (٢) ومنها ص= ٣س – ٢ (لماذا؟)

أُعوّض قيمة ص في المعادلة (١)، فيَنْتُج: ٢س + ٣(.....) = ١٦

ومنها قيمة س = ٢ (لماذا؟) أُعوّضُ قيمة س = ٢ في المعادلة: ص = ٣س – ٢

فيَنْتُج أنّ ص = ٤ (لماذا؟) أَتحقَّقُ من صحّة الحلّ.

أُفَكِّر: هل تختلف مجموعة حلّ المعادلتَيْنِ السّابقتَيْنِ عندما تُجْعل س موضوعاً للقانون؟

نشاط ٢:

أُكْمِلُ حلّ المعادلتَيْنِ الآتيتيْنِ بطريقة التَّعويض:

س + ٣ص = ١ .....(١) ٣س – ٤ص = -٢٣ ....(٢)

أختارُ المعادلة (١)، وأجعلُ س موضوع القانون فيها، ومنها س = (١ – ٣ص) .....(٣)

أُعَوِّضُ قيمة س في المعادلة (٢)، فيَنْتُج أنّ: ٣(١ – ٣ص) –٤ص = -٢٣

٣(١ –٣ص) – ٤ص = -٢٣ ، ومنها: ٣ – ٩ص – ٤ص = -٢٣

قيمة -١٣ص = -٢٦ (لماذا؟ ومنها: ص = ٢ (لماذا؟)
لإيجاد قيمة س، أُعَوِّض قيمة ص في المعادلة (٣)، فيَنْتُج أنّ: س = ١- × ٣ -١ ، ومنها س = -٥ (لماذا؟)

ثانياً - حلّ معادلتَيْنِ خَطِّيَّتَيْن بطريقة الحذف:

تقوم فكرة حلّ معادلتَيْنِ خَطِّيَّتَيْن بطريقة الحذف على جمع أو طرح المعادلتَيْنِ، أو صورهما المختلفة* لحذف أحد المتغيرَيْن، بحيث تَنْتُجُ معادلة بمتغير واحد.

نشاط ٣:

أُكْمِلُ حلّ المعادلتَيْنِ الآتيتيْنِ بطريقة الحذف:

٣س + ص = ١٠ ..... (١) س + ص = ٤ ..... (٢)

أَطْرَحُ المعادلتَيْنِ: ٣س – س + ص – ص = ١٠ - ... ومنها: ٢س = ... (لماذا؟) س = ...

لإيجاد قيمة ص، أُعَوِّضُ قيمة س في المعادلة (١)

٣(٣) + ص = ١٠ ومنها: ص = ... (لماذا؟)

نشاط ٤:

أُكْمِلُ حلّ المعادلتَيْنِ الآتيتيْنِ بطريقة الحذف:

٢س + ٣ص = ١ .....(١)

٣س – ٤ص = ١٠ .....(٢)

أُلاحِظُ أنَّ معاملات س و ص غير متساوية في المعادلتَيْنِ،

أَضْرِبُ طرفَي المعادلة (١) بالعدد -٣ فيَنْتُج: -٦س – ٩ص = -٣

أَضْرِبُ طرفَي المعادلة (٢) بالعدد ٢ فيَنْتُجُ: ٦س – ٨ص = ٢٠

أجمع المعادلتَيْنِ:

$$\begin{array}{r} -٦س - ٩ص = -٣ \\ + \quad ٦س - ٨ص = ٢٠ \\ \hline -١٧ص = ١٧ \end{array}$$

ومنها: ص = ... (لماذا؟)

ولإيجاد قيمة س، نُعَوِّضُ قيمة ص في المعادلة (١)

٢س + ٣ص = ١ و منها: ٢س + ٣(-١) = ١ س = ...

أُفَكِّر: هل تختلف قيمة س إذا عُوِّضَتْ قيمةُ ص في المعادلة الثّانية؟

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أَحُلُّ كُلَّ زوج من المعادلات فيما يأتي بطريقة التَّعويض:

أ) ٤س + ص= ١ ، ٥س – ٣ص = -٢٠

ب) ٢س – ص = ٥ ، ٣س + ٥ص = ١

٢) أَحُلُّ كُلَّ زوج من المعادلات فيما يأتي بطريقة الحذف:

أ) أ + ب = ١٠ ، $أ + \frac{٣}{٢}$ ب = -٤

ب) أ + ٤ب = ٣ ، ٦أ = ١ + ٢ب

مهمة تعليمية:

تباع التذاكر في مدينة ملاهٍ بسعر دينار واحد للأطفال، ودينارَيْنِ للكبار، فإذا كان العائد من بيع التذاكر في أحد الأيام ٥٦٠ ديناراً، وكان عدد الزّائرينَ من الصِّغار يزيد ٨٠ شخصاً عن عدد الزّائرينَ من الكبار. فما عدد زائري مدينة الملاهي في ذلك اليوم؟

- أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	دون المتوسط
التعرّف إلى الصّورة العامة للمعادلة التربيعيّة.			
حلّ المعادلة التربيعيّة بطرقٍ مختلفة.			
التعرُّف إلى مجموع وفرق مكعّبيْن.			
تحليل مجموع وفرق بين مكعبيْن.			
استخدام حلّ المعادلة التربيعيّة، والتحليل في حلّ مسائلَ حياتيّة.			

ورقة عمل (١)

١) أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ أيّ المعادلات الآتية تكافئ المعادلة س^{٢} + ٥س = ١٤؟

أ) $(س + \frac{٥}{٢})^{٢} = \frac{٨١}{٤}$ ب) $(س + \frac{٥}{٢})^{٢} = \frac{٤٥}{٤}$

جـ) $(س - \frac{٥}{٢})^{٢} = \frac{٨١}{٤}$ د) $(س - \frac{٥}{٢})^{٢} = \frac{-٥}{٤}$

٢ ما عدد الجذور الحقيقية للمعادلة س^{٢} − ٥س + ٨ = ٠ ؟

أ) صفر ب) ١

جـ) ٢ د) لا يمكن تحديده.

٣ ما جذور المعادلة ٢س^{٢} + ٥س + ١ = ٠؟

أ) $\frac{٥ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$ ب) $\frac{٥ \pm \sqrt{٣٣}}{٤}$

جـ) $\frac{-٥ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$ د) $\frac{-٥ \pm \sqrt{٣٣}}{٤}$

٤ ما قيمة م التي تجعل المقدار (س − م)(س^{٢} + ٢س + ٤) فرقاً بين مكعبين؟

أ) ٤ ب) ٢ جـ) -٢ د) -٨

٢) أحلّ المعادلات الآتية:

أ) ب^{٢} − ٤ب + ٤ = ١٦

ب) ص^{٢} − ١٢ص + ٣٦ = ٥

جـ) (س + ٣)(س − ٤) = ١٠

٣) إذا كان العدد ٢ أحدَ جذريّ المعادلة: س^{٢} − ٥س + ن = صفر، أجد قيمة الثابت ن، ثمّ أجدُ الجذرَ الثاني.

٤) أحلّل المقادير الآتية إلى عواملها الأوّليّة:

أ) $\frac{١}{١٢٥}$ أ^{٣} − $\frac{٢٧}{٦٤}$ ص^{٣} ب) ٤٠س^{٣} + ٥ص^{٣} جـ) ٥٤س^{٤} − ٢س

٦-٣ متوازي الأضلاع

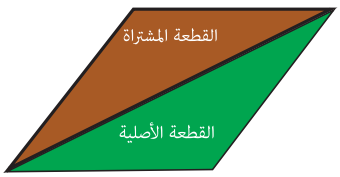
أتذكّر: من خصائص متوازي الأضلاع : كلُّ ضلعيْنِ متقابليْنِ متساويانِ في الطّول.

أتعلّم: يمكن إنشاءُ متوازي أضلاعٍ من مثلّثٍ معلومٍ باستخدام خاصيّة متوازي الأضلاع (كلُّ ضلعيْنِ متقابليْنِ متساويانِ في الطول).

نشاط١:

يمتلكُ مزارعٌ قطعةَ أرضٍ مثلّثةَ الشّكل مساحتها ١٠٠٠م٢، فإذا قام المزارع بشراء قطعةِ أرضٍ مجاورةٍ، لها الأبعادُ نفسُها، لتصبحَ أرضُه على شكل متوازي أضلاع، فما مساحةُ قطعةِ الأرضِ التي أصبح يمتلكها المزارع؟

أرسم رسماً توضيحيّاً كما في الشكل المجاور.

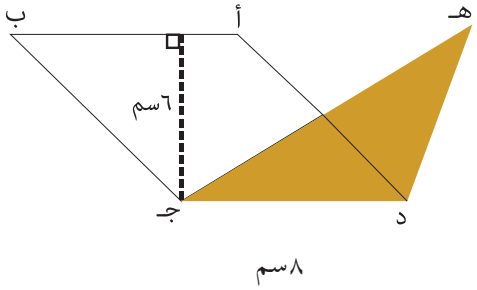


مساحة قطعة الأرض = مساحة متوازي الأضلاع = ٢ × مساحة المثلث (لماذا ؟)

= ٢ × ٠٠٠٠٠ = ٢٠٠٠م٢

نشاط٢:

يبيّن الشكل المجاور متوازي الأضلاع أ ب جـ د، المشترك مع المثلث هـ د جـ في القاعدة والارتفاع، أكمل:



ارتفاع المثلث هـ د جـ = ٦ سم (لماذا ؟)

ارتفاع متوازي الأضلاع أ ب جـ د = ٠٠٠٠سم

طول قاعدة المثلث هـ د جـ = ٨ سم

طول قاعدة متوازي الأضلاع أ ب جـ د = ٠٠٠٠سم

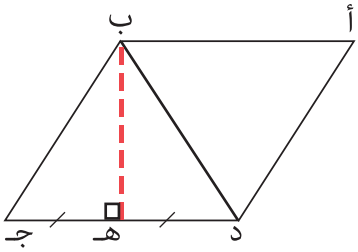
مساحة المثلث هـ د جـ = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع. = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٠٠٠٠ = ٢٤سم٢

مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ د = القاعدة × الارتفاع = ٨ × ٠٠٠٠ = ٤٨سم٢

فما العلاقة بين مساحة المثلث ومساحة متوازي الأضلاع المشترك معه في القاعدة والارتفاع ؟

أتعلّم: مساحة متوازي الأضلاع = ٢ × مساحة المثلث المشترك معه في القاعدة والارتفاع.

نشاط٣:



د ب جـ مثلّثٌ متساوي الأضلاع، طول ضلعه ٦ سم، أجدُ مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ د.

مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ د = ٢ × مساحة المثلث د ب جـ (لماذا؟)

مساحة المثلث د ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × د جـ × ب هـ = ٣ ب هـ

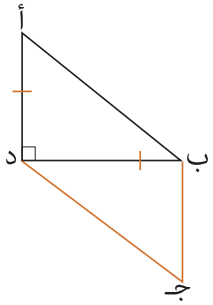
أستخدم نظريّة فيثاغورس لإيجاد ب هـ (لماذا؟)

(ب د)^{٢} = (ب هـ)^{٢} + (د هـ)^{٢} ، ومنها: ٣٦ = (ب هـ)^{٢} + ٩

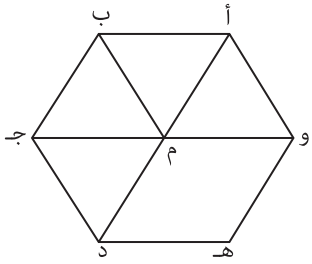
ب هـ = $\sqrt{٢٧}$ = ٣$\sqrt{٣}$ سم ومنها: مساحة المثلث د ب جـ = ٣ × ٠٠٠٠سم^{٢} = ٩$\sqrt{٣}$ سم^{٢}

مساحة متوازي الأضلاع = ٢× ٩$\sqrt{٣}$ = ٠٠٠٠سم^{٢}

تمارين ومسائل:

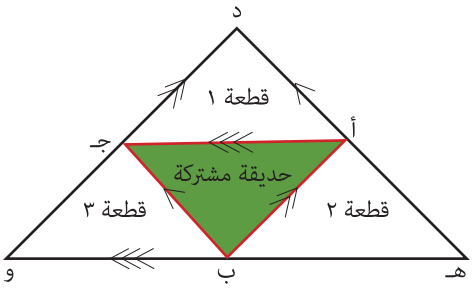


١) أ ب جـ د متوازي أضلاع، أ د ب مثلث متساوي الساقيْن، وقائم الزاوية في د، إذا كان أ د = ٤سم، أجد مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ د؟



٢) بالاعتماد على الشكل المجاور، الذي فيه $\overline{أب}$ // $\overline{و جـ}$ ، مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ م تساوي ٢٠سم^{٢}، ما مساحة الشكل الرباعي أ و جـ ب؟

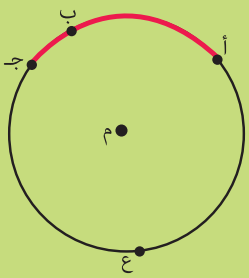
مهمة تعليمية:



ورث ثلاثةُ إخوةٍ قطعةَ أرض، مثلّثةَ الشّكل، فأرادوا تقسيمَها بينهم بالتساوي، اقترح أحدُهم تقسيمَ قطعةِ الأرض، كما في الشكل المجاور، على أنْ تبقى المنطقةُ أ ب جـ حديقةً مشتركة. فهل تتساوى الحصصُ في قطعة الأرضِ بناءً على هذا الاقتراح؟ أوضح اجابتي؟

٣-٧ القطاع الدائريّ والقطة الدائرية

تعريف: لتكن أ ، جـ نقطتيْن على الدائرة، كما في الشكل المجاور، تقسمان الدائرة إلى جزأين، يُسمّى كلُّ جزءٍ منهما قوساً للدائرة، ويرمز له بالرمز $\overset{\frown}{أ\ جـ}$.



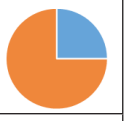
القوس الأصغر $\overset{\frown}{أ\ جـ}$ ، ويُميّز بالرمز أ ب جـ.

القوس الأكبر $\overset{\frown}{أ\ جـ}$ ، ويُميّز بالرمز $\overset{\frown}{أ\ ع\ جـ}$.

٢- القطاع الدائري هو: الجزءُ المحصورُ بين نصفيّ قطريْن وقوسٍ في دائرةٍ، وتُسمّى الزاويةُ المركزيّة المحصورةُ بين نصفيّ قطريْن فيه زاويةَ القطاعِ الدائريّ.

نشاط ١

أتأمّلُ القطاعاتِ الدائريّة في الجدول الآتي، ثمّ أُكمل:

القطاع	الكسر الذي يمثّله طول القوس الأصغر	قياس زاوية القطاع الأصغر	نسبة طول قوس القطاع الأصغر إلى محيط الدائرة	نسبة مساحة القطاع الأصغر إلى مساحة الدائرة	نسبة قياس زاوية القطاع الأصغر إلى الدورة الكاملة
	$\frac{١}{٢}$	١٨٠°	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢} = \frac{١٨٠^\circ}{٣٦٠^\circ}$
		٩٠°	$\frac{١}{٤}$		$\frac{٩٠^\circ}{٣٦٠^\circ} =$ ...
	$\frac{١}{٨}$			$\frac{١}{٨}$	

أتعلّم: إذا كانت (هـ) زاوية القطاع الدائري في دائرة، فإنّ:

$$\frac{\text{زاوية القطاع (هـ)}}{360^\circ} = \frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}}$$

نشاط٢:

قطاعٌ دائريّ في دائرةٍ نصفُ قطرِها ١٤سم، وطولُ قوسِه ١١سم، أجدُ قياسَ زاويةِ قطاعه.

$$\frac{\text{زاوية القطاع}}{360^\circ} = \frac{\text{طول قوس القطاع}}{2\pi \text{ نق}} \quad \text{زاوية القطاع} = \frac{\text{طول قوس القطاع}}{2\pi \text{ نق}} \times 360^\circ \quad \text{(لماذا) ؟}$$

$$\text{زاوية القطاع} = \frac{11}{2 \times 14 \times \frac{22}{7}} \times 360^\circ = \frac{1}{8} \times 360^\circ \quad \text{زاوية القطاع} = 45^\circ$$

أتعلّم: زاوية القطاع الدائري $= \frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}} \times 360^\circ$.

نشاط٣:

رُسِمَ قطاعٌ دائريّ في دائرةٍ نصفُ قطرِها ٣,٥سم، فكانت زاوية هذا القطاع ٣٠°، فما طول القوس المقابل للزاوية ٣٠°؟

$$\frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{زاوية القطاع}}{360^\circ}$$

$$\text{طول قوس القطاع} = \frac{\text{زاوية القطاع}}{360^\circ} \times \text{محيط الدائرة} \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$\text{طول قوس القطاع} = \frac{30^\circ}{360^\circ} \times 2 \text{ نق } \pi \text{ ومنها} = \frac{1}{12} \times 2 \times 3{,}5\ \pi = 2{,}2 \text{ سم}$$

أتعلّم: طول قوس القطاع الدائري $= \frac{\text{زاوية القطاع}}{360^\circ} \times$ محيط الدائرة.

نشاط ٤ :

أراد مهندسٌ إعادةَ تعشيبِ المنطقةِ التالفةِ من دائرة الوسط في ملعب كرة قدم، كما في الرسم التوضيحي المجاور. أُكملُ إيجادَ مِساحةِ القطاع الدائري المراد إعادةُ تعشيبه، علماً بأنّ نصفَ قطرِ دائرةِ وسطِ الملعب = ٩,١٥م، وطول قوس قطاع المنطقة التالفة ٢٢م.

مساحة القطاع الدائري = $\frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}}$ × مساحة الدائرة (لماذا؟)

= $\frac{\text{طول قوس القطاع}}{٢ \times \pi \text{ نق}}$ × نق^{٢} × π = $\frac{١}{٢}$ × طول قوس القطاع × نق (لماذا؟)

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٢ × ٩,١٥ = ١٠٠٫٥ م^{٢}

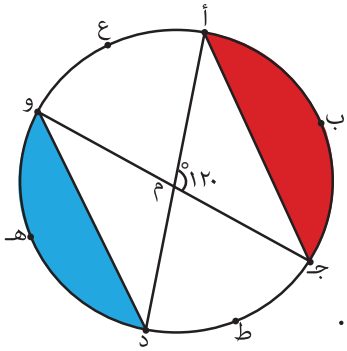
أتعلّم: مساحة القطاع الدائري = $\frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}}$ × مساحة الدائرة .

= $\frac{١}{٢}$ × طول قوس القطاع × نق

تعريف: يُسمّى الجزءُ المحصورُ بين قوسٍ ووترٍ يمرُّ بنهايتيّ ذلك القوس في الدائرة القطعةَ الدائريّة.

نشاط ٥ :

أتأمّل الشكل المجاور، ثم أُكمل:



- زاوية القطعة الدائرية أ ب جـ = زاوية القطاع الدائري أ م جـ ب

= ١٢٠° (لماذا؟)

- زاوية القطعة الدائرية د هـ و = زاوية القطاع الدائري .... = ...

- زاوية القطعة الدائرية جـ ط د = ...

أتعلّم: زاوية القطعة الدائريّة تساوي زاويةَ القطاعِ الدائريّ المشتركة معه في القوس نفسه.

نشاط٦:

أجدُ زاويةَ قطعةٍ دائريّةٍ في قطاعٍ دائريّ، طولُ قوسِه ٥,٦ π سم، ونصفُ قطرِ دائرتِه ٧سم.

$$\text{زاوية القطعة الدائريّة} = \text{زاوية القطاع الدائري} = \frac{\text{طول قوس القطاع}}{\pi \text{ نق} \times ٢} \times ٣٦٠^\circ$$

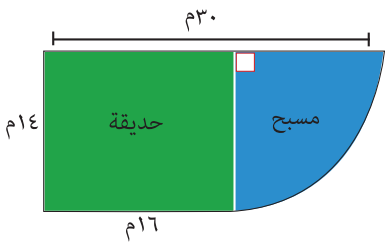
$$= \frac{\pi\ ٥,٦}{\pi\ (٧)\ ٢} \times ٣٦٠^\circ = \ldots\ldots$$

تمارين ومسائل:

١) قطاعٌ دائريّ مساحتُه ٥٠ سم^٢، ونصفُ قطرِ دائرته ٧سم، فما طول قوس هذا القطاع؟

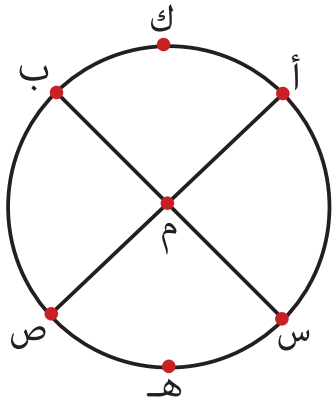
٢) ما قياسُ زاويةِ قطاعٍ دائريّ، نصفُ قطرِ دائرتِه ١٥سم، ومساحتُه ٤٥٠سم^٢؟

٣) يُمثّلُ الشكلَ المجاورَ مخطّطَ مسبحٍ وحديقةِ منزل. أجدُ:



أ) مساحةَ سطحِ المسبح. ب) محيطَ الحديقةِ والمسبح.

٤) قطاعٌ دائريّ محيطُه ٢٥سم، ومساحتُه ٣٦سم^٢، أجدُ نصفَ قطرِ دائرتِه، وطولَ قوسه.



٥) أجدُ طولَ قوسِ قطعةٍ دائريّةٍ في دائرةٍ نصفُ قطرِها ٢١ سم، وقياسُ زاويةِ قطاعِها ٣٦°.

٦) رُسمَ قطران في دائرة مركزها م، كما في الشكل المجاور فإذا كانت مساحة القطعة الدائرية أ ك ب = ٥سم^٢، وكانت مساحة القطاع الدائري ص م س هـ = ١١سم^٢، فما مساحة المثلث م س ص.

٣-٨ الأسطوانة

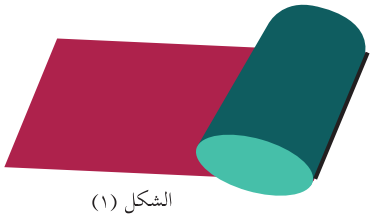
تعريف: الأسطوانة الدائريّة القائمة: هي المجسّمُ المتولّدُ من دوران المستطيل دورةً كاملةً حول أحدِ أضلاعِه.

نشاط ١:

١) أحضر علبة معدنية أسطوانية مغلقة من القاعدتين، وأرسم مولداً لهذه الأسطوانة.

٢) أحضر قطعة كرتون مستطيلة الشكل، بحيث يكون عرضها مساوياً لطول مولد الأسطوانة، وأضعها على سطح مستوٍ.

٣) أثبت مولد الأسطوانة عند حافة قطعة الكرتون كما في الشكل (١).

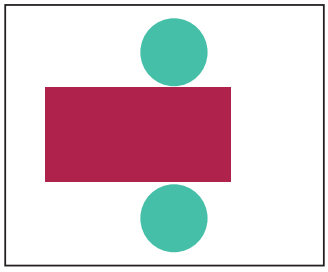


الشكل (١)

٤) أدور الأسطوانة على قطعة الكرتون حتى يعود مولد الأسطوانة ملامساً لسطح القطعة.

٥) أحدد المنطقة التي دارت عليها الأسطوانة.

٦) أقص المنطقة المستطيلة الناتجة والتي طولها يساوي محيط قاعدة الأسطوانة، وعرضها يساوي ارتفاع الأسطوانة.



الشكل (٢)

٧) أرسم قاعدتي الأسطوانة، وأقصهما. فتكون شبكة الأسطوانة كما في الشكل (٢).

أتعلّم: شبكةُ الأسطوانةِ الدائرية القائمة: هي مستطيلٌ طولُ أحد أضلاعِه محيطُ القاعدة ، وطولُ الضّلع الآخر للمستطيل ارتفاعُ الأسطوانة ، ودائرتان متطابقتان. تُسمّى الدائرتان قاعدتيّ الأسطوانة.

نشاط ٢: يُرادُ بناءُ أسطوانةٍ مفتوحةٍ من القاعدتين من مستطيلٍ، طولُه يساوي ٧ π سم، وعرضُه ٣سم، فما المِساحةُ الجانبيّة للأسطوانة؟

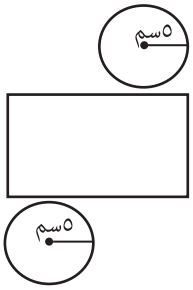
ارتفاع الأسطوانة = عرض المستطيل = ٣سم. محيط قاعدة الأسطوانة = طول المستطيل = ٧ π سم (لماذا؟)

المساحة الجانبيّة للأسطوانة = محيط قاعدة الأسطوانة × الارتفاع (لماذا؟)

= ٧ π × ٣ = ٠٠٠٠سم٢

أتعلّم: المِساحةُ الجانبيّةُ للأسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢نق π × الارتفاع.

نشاط ٣: معتمداً على شبكة الأسطوانة المبيّنة في الشكل المجاور، أجدُ المِساحةَ الكليّة لهذه الأسطوانة.



المِساحة الجانبيّة للأسطوانة = مساحة المستطيل.

= محيط الدائرة × ارتفاع الأسطوانة (لماذا؟) = ٢ نق π × ٧ = ٢ × ٥ × ٧ π = ٠٠٠٠سم٢

مساحة قاعدة الأسطوانة = مساحة الدائرة. = نق٢ × π = ٠٠٠٠سم٢

المساحة الكليّة للأسطوانة = المساحة الجانبيّة للأسطوانة + مساحة القاعدتيْن

= ٧٠ π + ٢ × مساحة الدائرة = ٧٠ π + ٥٠ π = ٠٠٠٠سم٢

أتعلّم: المِساحة الكليّة للأسطوانة = المساحة الجانبيّة + مساحة القاعدتين.

= ٢نق π ع + ٢نق٢ π

نشاط ٤: ما المِساحة الكليّة لأسطوانةٍ نصفُ قطرِ قاعدتِها ٣,٥سم، وارتفاعها ٨سم؟

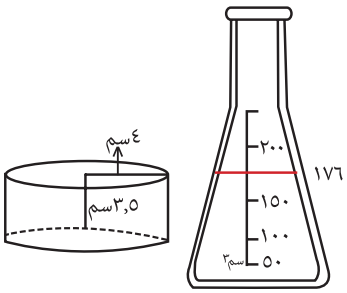
المساحة الكليّة للأسطوانة = ٢نق π ع + ٢نق٢ π

= ٢(٣,٥) π (٨) + ٢(٣,٥)٢ π = ٥٦ π + ٢(١٢,٢٥) π

= ٥٦ π + ٠٠٠٠ = ٠٠٠٠سم٢

نشاطه:

وعاءٌ على شكل أسطوانةٍ نصفُ قطرِ قاعدتِه ٤سم ، وارتفاعُه ٣,٥سم، مُلِئ بالماء، وأُفرِغَ في مدرجٍ مخبريّ لقياس الحجم، فأشار التدريج إلى أنّ حجم الماء في الأسطوانة ١٧٦سم^{٣}، كما في الشكل التوضيحي المجاور.



ما العلاقة بين حجم الماء في الأسطوانة وحاصل ضرب مساحة قاعدتها في ارتفاعها؟

مساحة القاعدة × الارتفاع = نق^{٢} × π × ع

= (٤)^{٢} × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٣,٥ = ٠٠٠ × ١١ (لماذا؟) = ١٧٦سم^{٣}

ألاحظ أنّ: حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع.

أتعلّم: حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع.

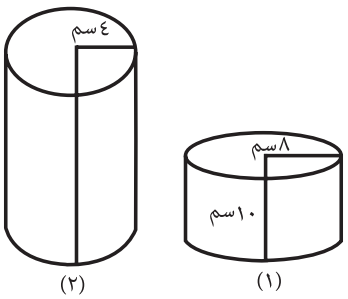
= نق^{٢} × π × ع

تمارين ومسائل

١) أسطوانةٌ قائمةٌ، محيطُ قاعدتِها ٢٠ π سم، وارتفاعها ١٠سم، أجدُ مِساحتَها الجانبيّة.

٢) علبة إسطوانية الشكل ارتفاعُها ١٠سم، وحجمها ٢٥٠ π سم^{٣} ، فما نصفُ قطرِ قاعدةِ هذه العلبة؟

٣) معتمداً على الشكل المجاور، ما ارتفاع الأسطوانة الثانية، بحيث يكون للأسطوانتيْن الحجم نفسه؟



٤) علبةُ صابونٍ على شكل أسطوانةٍ قائمة، حجمها ٣٢٠ π سم^{٣}، فإذا كان نصفُ قطرِها ٨سم، فكم يبلغ ارتفاعُ هذه العلبة؟

مهمة تعليمية:

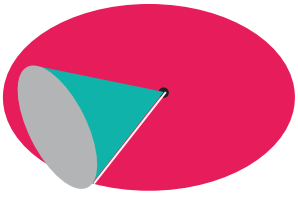
وعاءان لتخزين الزيت الأول على شكل إسطوانة قطرها ١٤سم وارتفاعها ١٤سم، والثاني على شكل مكعب طول ضلعة ١٤سم، فأي الوعائين يتسع لكمية أكبر من الزيت؟

تعريف: المخروط القائم: هو المجسّمُ المتولّدُ من دوران مثلّثٍ قائمِ الزّاوية دورةً كاملةً حول أحدِ ضلعيّ القائمة.

راسم المخروط القائم: قطعةٌ مستقيمةٌ تصلُ رأسَ المخروطِ وأيّةَ نقطةٍ تقعُ على دائرةِ قاعدتِه.

ارتفاع المخروط القائم: العمودِ النّازلِ من رأسِ المخروطِ على قاعدةِ المخروط.

نشاط ١:

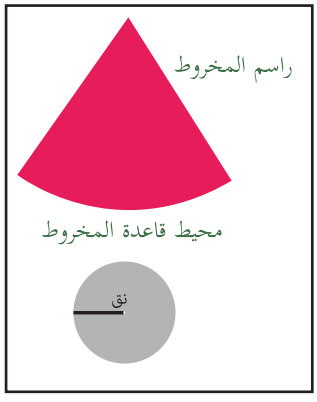


الشكل (١)

١) أُحضرُ مخروطاً مُغلَقاً من القاعدة وأرسم مولداً لهذا المخروط.

٢) أرسمُ دائرةً نصفُ قطرِها يساوي طولَ راسمِ المخروط.

٣) أضعُ المخروطَ على سطح الدائرة، بحيث يكون المولّدُ (الراسم) منطبقاً على نصف قطر الدائرة، ورأس المخروط في مركز الدائرة كما في الشكل (١).



الشكل (٢)

٤) أُدوّرُ المخروطَ إلى أنْ يعودَ المولّدُ ملامساً لسطح الدائرة من جديد.

وألاحظُ أنّ الشكلَ الناتجَ عن دورانِ المخروط دورةً كاملةً هو قطاعٌ دائريّ.

٥) أقصُّ الشّكلَ الناتجَ.

٦) أرسم قاعدة المخروط وأقصّها، فتكون شبكة المخروط كما في الشكل (٢).

أتعلّم: شبكةُ مخروطٍ دائريَ قائم تتكوّنُ من قطاعٍ دائريٍّ نصفُ قطرِ دائرته يساوي راسمَ المخروط، ودائرةٍ نصفُ قطرِها يساوي نصفَ قطرِ قاعدةِ المخروط.

طول راسم المخروط = نصف قُطر القطاع الدائري،

محيط قاعدة المخروط = طول قوس القطاع الدائري.

نشاط ٢ :

أجدُ المِساحةَ الجانبيّة لمخروطٍ دائريّ قائم، قُطرُ قاعدتِه ٢م، وطول راسمه ٣,٥م.

المساحة الجانبيّة للمخروط = $\frac{١}{٢}$ × نصف قطر دائرة القطاع × طول قوس القطاع

= $\frac{١}{٢}$ × ل × ٢ × نصف قطر الدائرة × π، حيث ل: راسم المخروط. (لماذا؟)

= ل نق π، حيث نق : نصف قطر قاعدة المخروط. (لماذا؟)

= ٣,٥ × ١ × ٠٠٠٠ = ٠٠٠٠م^{٢}

أتعلم: المساحة الجانبية للمخروط = ل نق π، حيث ل: راسم المخروط،
نق: نصف قطر قاعدة المخروط.

نشاط ٣ :

مخروطٌ دائريّ قائم، نصفُ قطرِ قاعدتِه ٩سم، وارتفاعُه ١٢سم، فما مِساحتُه الجانبيّة؟

ل^{٢} = نق^{٢} + ع^{٢} ومنها ل^{٢} = (٩)^{٢} + (٠٠٠)^{٢}

أي أنّ: ل^{٢} = ٠٠٠ + ١٤٤، ومنها: ل^{٢} = ٢٢٥ ، ومنها: ل = ١٥سم

المساحة الجانبيّة للمخروط = ل نق π = ١٥ × ٩ × π = ٠٠٠سم^{٢}

نشاط ٤ :

أُبيّنُ أنّ المساحةَ الكليّة لمخروطٍ دائريّ قائم، طولُ نصفِ قطرِ قاعدتِه ٧سم، وطولُ راسمِه ٢٠ سم، تساوي ٥٩٤سم^{٢}.

المساحة الجانبيّة للمخروط = ل نق π = ٢٠ × ٧ × ٠٠٠ = ٤٤٠سم^{٢}

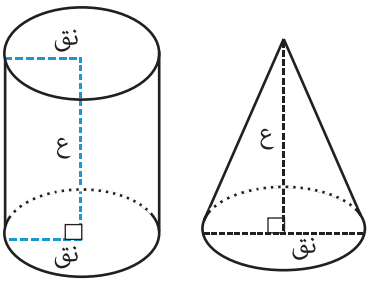
مساحة قاعدة المخروط = نق^{٢} π = ٧ × ٧ × $\frac{٢٢}{٧}$ = ٠٠٠٠سم^{٢}

المساحة الكليّة = المساحة الجانبيّة + مساحة القاعدة

= ٤٤٠ + ١٥٤ = ٠٠٠٠سم^{٢}

نشاط ٥:

أُحضرُ مخروطاً، وأسطوانةً مشتركيْن في القاعدة والارتفاع.



١- أملأُ المخروطَ بالرمل. ٢- أُفرغُ الرمل في الأسطوانة.

٣- أكرّرُ حتى تمتلئ الأسطوانة.

٤- ألاحظ أنّ عددَ المخاريط التي تملأ الأسطوانة = ٣.

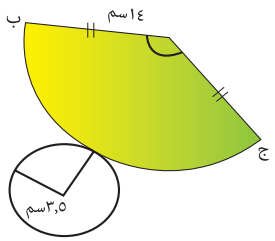
أي أنّ: حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × حجم الأسطوانة.

أتعلّم: حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × حجم الأسطوانة المشتركة معه في القاعدة والارتفاع.

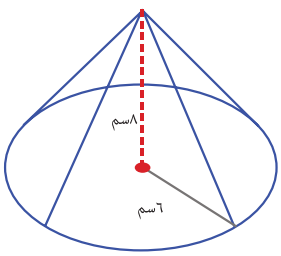
$= \frac{١}{٣}$ نق^{٢} ع π

تمارين ومسائل

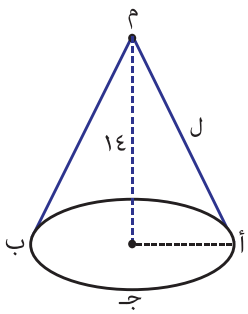
١) الشكل المجاور يمثّلُ شبكةَ مخروط، أجدُ طولَ $\overset{\frown}{ب\ ج}$.



٢) أجدُ حجمَ المخروطِ الموضّح في الشكل المقابل.



٣) مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤سم ومساحته الجانبية ٦٢,٨سم^{٢}، معتبراً (π = ٣,١٤)، أجد:



١- ارتفاع المخروط. ٢- طول راسم المخروط.

٤) الشكل المجاور مخروط فيه أ ب قطرُ القاعدة، طولُ القوس $\overset{\frown}{أ\ جـ\ ب}$ يساوي ٧ π سم، ارتفاعُ المخروط يساوي ١٤سم، أجدُ المِساحةَ الكليّة للمخروط.

مهمة تعليمية:

أعلنتْ شركةٌ عن إمكانيّةِ إنشاءِ مشروعِ عملِ صوامعَ لتخزينِ الحبوب، ذات قاعدةٍ مخروطيّةٍ، نصفُ قطرِ قاعدتها ٣م، وارتفاعُها ٤م. أجدُ حجمَ الصومعةِ، علماً بأنّ ارتفاعَ الصومعةِ الكليّ ١٢م .

ورقة عمل (١)

١) أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ بماذا تحدّد القطعةُ الدائريّةُ؟

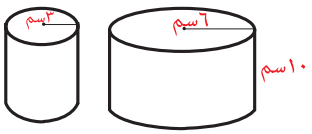
أ) نصفيّ قطريْن وقوسٍ محصور بينهما. ب) وترَيْن وقوسٍ محصور بينهما.

جـ) قوسٍ ووترٍ يمر بنهايتيّ القوس. د) نصفي قطرين ووتر في الدائرة.

٢ رُسمَ شكلٌ سداسيٌّ منتظَمٌ في دائرةٍ نصفُ قطرِها ١٤سم، ما قياسُ زاويةِ القطاع الدائري المقابلة لأحد أضلاع الشكل السداسي؟

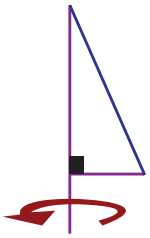
أ) ٤٥° ب) ٦٠° جـ) ٩٠° د) ١٢٠°

٣ قرّرَ مصنعٌ مضاعفةَ نصفِ قطرِ علبةِ البندورة، كما هو موضّحٌ في الشكل المجاور، كم يتضاعف حجم العلبة؟



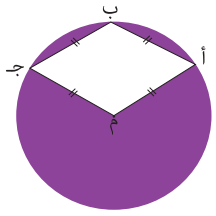
أ) ضعفين. ب) ٣ أضعاف. جـ) ٤ أضعاف. د) ٦ أضعاف.

٤ معتمداً على الرسم التوضيحيّ المجاور، ما ارتفاعُ المخروطِ الناتج عن دوران مثلثٍ قائمِ الزّاوية، طولُ وترِه ١٠سم، وطول قاعدته ٦سم؟



أ) ٦ سم ب) ٨ سم جـ) ١٠ سم د) ١٦ سم

٢) أجدُ مِساحةَ المنطقةِ المظلّلةِ في الشكل المجاور، علماً بأنّ مِساحةَ الدائرة ٦٤ π سم^{٢}، م مركز الدائرة.



٣) أسطوانةٌ دائريّةٌ قائمةٌ مملوءةٌ بالماء، قطرُ قاعدتِها ٢٠سم، وارتفاعُها ١٠سم، فُرّغَ ما فيها من ماءٍ في إناءٍ فارغٍ على شكلِ مخروطٍ دائريٍّ قائم، نصفُ قطرِ قاعدتِه ٣٠سم، فكم يكونُ ارتفاعُ الماءِ فيه؟

اختبار ذاتي

س١: أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة للفقرات (١-١٠):

١) ما قيمة (ع) التي تجعل للمعادلة (س^{٢} − ٨س + ع) جذراً وحيداً؟

أ) -١٦ ب) ١٦ جـ) ٢ د) -٢

٢)ما قيمة زاوية القطعة الدائرية في قطاع دائري طول قوسه (٥,٦ π) سم ونصف قطره (٧) سم؟

أ) ١٤٤° ب) ١٦٩° جـ) ١٧٥° د)١٥٥°

٣) ما الصيغة التي يمكن استخدامها لحساب حجم الأسطوانة التي نصف قطرها (نق)،وارتفاعها (ع)؟

أ) $\frac{٣}{٤}$ نق^{٣} π ع ب) نق π ع جـ) $\frac{١}{٤}$ نق^{٢} π ع د) نق^{٢} π ع

٤) أي من المعادلات الآتية تربيعية؟

أ) س^{٢} − ٤س + ١ = ٠ ب) $\sqrt{٧}$ س − ١ = ٠

جـ) س − ٣ = ٢س د) س($\sqrt{٧}$ س − ٢) = ٠

٥) ما مجموعة حل المعادلة التربيعية ٢س^{٢} − س − ٣ = ٠؟

أ) $\frac{-٢}{٣}$ ، ١ ب) $\frac{-٣}{٢}$ ، ١ ج) $\frac{٢}{٣}$ ، -١ د) $\frac{٣}{٢}$ ، -١

س٢: أجد جذور المعادلة التربيعية الآتية : ٢س^{٢} + ٥س + ١ = ٠ (باستخدام طريقة إكمال المربع).

س٣: خزان وقود مخروطي الشكل مصنوع من الفولاذ، نصف قطر قاعدته ٣م، وارتفاعه ٤م، أجد تكلفة طلائه من الداخل والخارج، إذا كان سعر علبة الدهان ٦ دنانير، وتكفي لطلاء ١٠م^{٢}.

س٤: اجد حل المعادلتين س + ٣ص = ٣، ٢س + ص = -٤ بالتعويض.