كتاب

السائد

في الرياضيات

12

للصف الثاني عشر

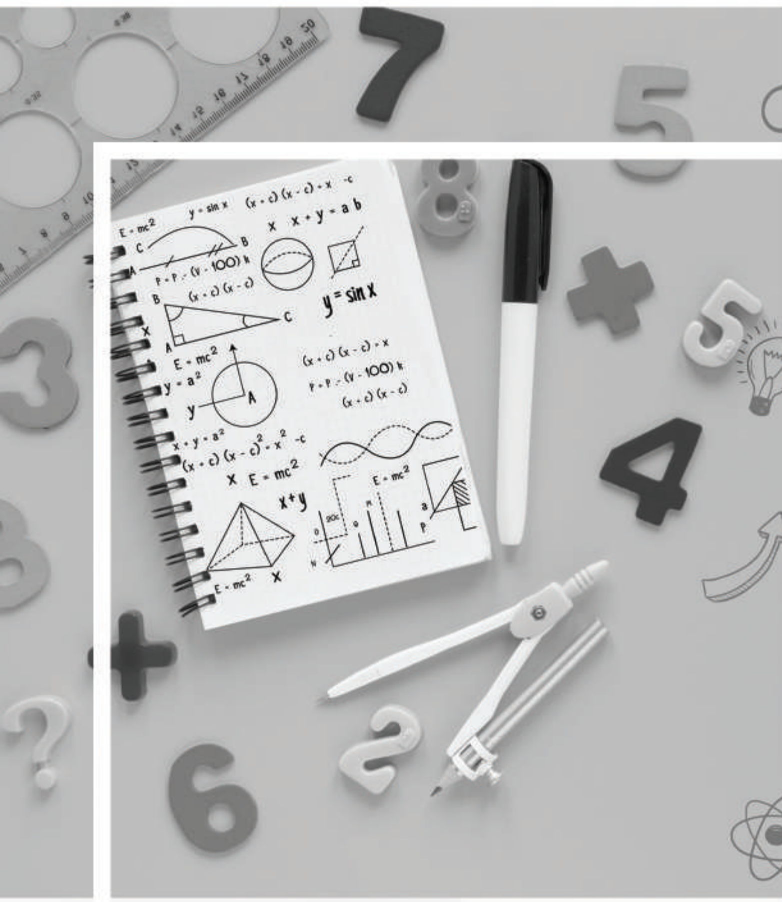
للفرعين

الأدبي

الشرعي

حسب المنهاج الفلسطيني

الفصل الأول



إعداد

أ. سائد زياد الحلاق

جوال: 0599632532

إشراف

مشرفي الرياضيات بمديرية غرب غزة

2020-2021

فهرس محتويات الكتاب

كلمة شكر

الحمد لله رب العالمين ، الحمد لله الذي خلقني أعمل بمهنة الأنبياء والمرسلين ......

لولا قناديل النور ما اهتدينا في الظلام ...

ولولا اكتظاظ القاع ما صعدنا للقمم ...

ولولا التحفيز والتشجيع ممن هم قامات إشراف الرياضيات ما خرج إبداع المعلم للنور ...

أتقدم بشكري الجزيل لمشرفي الرياضيات بمديرية التربية والتعليم غرب غزة

أ.باسم المدهون د.رحمة عودة

أ.إبراهيم صالحة أ. هدى الزريعي

على جهودهم في الإشراف والتوجيه على دعمهم لإصدار كتاب السائد للثانوية العامة لمبحث الرياضيات للفرعين الأدبي والشرعي.

إعداد المعلم : سائد الحلاق

كما أتوجه بجزيل الشكر الخاص لزميلتي المعلمة جيهان محمود النمر على جهودها لمساعدتي بالتدقيق والمراجعة النهائية للكتاب .

والله من وراء القصد ....

المؤلف : أ.سائد زياد الحلاق

الوحدة الأولى

أولاً

التفاضل

ملخص التفاضل

متوسط التغير:

- ليكن الاقتران ص = ق(س) اقتراناً وتغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن:

التغير في قيمة س = $س_٢ - س_١$ ، ويرمز لهُ بالرمز Δس ويقرأ دلتا س .

التغير في قيمة ص = $ص_٢ - ص_١$ = ق$(س_٢)$ − ق$(س_١)$ ، ويرمز لهُ بالرمز Δص ويقرأ دلتا ص.

- ليكن الاقتران ق(س) اقتراناً وتغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن:

متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$ ، $س_١ \neq س_٢$

- ميل القاطع = متوسط التغير = م = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

قواعد الاشتقاق :

إعداد المعلم: سائد الحلاق

يرمز للمشتقة الأولى بأكثر من رمز $\left(ص' ، ق' ، \frac{ءص}{ءس} \right)$

١) إذا كان ص = ق(س) = أ ، حيث أ عدد حقيقي ، فإن ق$'$ = $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر (مشتقة الاقتران الثابت صفراً)

٢) إذا كان ص = أس + ب، حيث أ ، ب عددان حقيقيان ، فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = أ

٣) إذا كان ق(س) = $س^{ن}$ ، فإن ق$'$ = ن $س^{ن-١}$ ، حيث: ن عدد حقيقي ، ن ≠ ٠ ، س ≠ ٠

٤) إذا كان ق(س) = م $س^{ن}$ ، فإن ق$'$ = م × ن $س^{ن-١}$ ، حيث: ن عدد حقيقي ، ن ≠ ٠ ، م ≠ ٠ ، س ≠ ٠


٥) إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، وكان أ عدداً حقيقياً ، أ $\neq$ ٠ ، فإن الاقتران هـ(س) = أ ق(س)

هو اقتران قابل للاشتقاق ، وتكون هـ$'$(س) = أ ق$'$(س).

٦) قاعدة مشتقة جمع أو طرح اقترانين إذا كان ق(س)،هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان

ك(س) = ق(س) $\pm$ هـ(س)، فإن: الاقتران ك(س) يكون قابلاً للاشتقاق ، ويكون ك$'$(س) = ق$'$(س) $\pm$ هـ$'$(س)

٧) قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين: إذا كان ق(س)،هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند ، س = أ فإن :

$$(ق \times هـ)'(أ) = ق(أ) \times هـ'(أ) + هـ(أ) \times ق'(أ)$$

- أي أن : مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الاقتران الأول $\times$ مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني $\times$ مشتقة الاقتران الأول

٨) قاعدة مشتقة خارج قسمة اقترانين:

إذا كان ق(س)،هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان هـ(س) $\neq$ ٠ عند ، س = أ فإن :

$$(ق \div هـ)'(أ) = \frac{\left(هـ(أ) \times ق'(أ)\right) - \left(ق(أ) \times هـ'(أ)\right)}{\left(هـ(أ)\right)^{2}}$$

إعداد المعلم سائد الحلاق

أي أن : مشتقة حاصل ضرب اقترانين = $\frac{\text{(المقام × مشتقة البسط) – (البسط × مشتقة المقام)}}{\text{مربع المقام}}$

- إذا كان ق(س) = $\frac{أ}{هـ(س)}$ ، هـ(س) $\neq$ ٠ ، أ $\in$ ح

فإن : ق$'$(س) = $\frac{-أ هـ'(س)}{\left(هـ(س)\right)^{2}}$

القيم القصوى المحلية للاقتران

نتبع الخطوات التالية لتحديد القيم القصوى للاقتران ثم بحث فترات التزايد والتناقص/

أولا : القيم القصوى للاقتران:

١) إيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق(س) المعطى لنحصل على ق′(س) .

٢) نجد قيمة أو قيم س التي عندها المشتقة الأولى تساوي صفر .

٣) نرسم خط الأعداد ونعين النقطة أو النقاط على خط الأعداد ونقسم المجال إلى فترات.

٤) نبحث إشارة ق′(س) في كل فترة ، ثم نعين الإشارة ونحدد نوع القيم القصوى (عظمى ، صغرى).

٥) نعوض بالاقتران الأصلي بقيمة أو قيم س ونجد القيم القصوى قيم ص (عظمى ، صغرى).

مديرية التقوى الثانوية للبنين أ. سائد الحلاق

ثانياً : فترات التزايد والتناقص/

نتبع الخطوات السابقة حتى الخطوة الثالثة:

إعداد المعلم : سائد الحلاق

نبحث إشارة ق′(س) حول قيمة أو قيم س السابقة في كل فترة ، ثم نُعين الإشارة ، ويصنف كما يلي:

يكون الاقتران ق(س) متزايد على مجالهُ إذا كانت إشارة ق′(س) موجبة ، ق′(س) > ٠ ⟵ (+ + + +)

ويكون الاقتران ق(س) متناقص على مجالهُ إذا كانت إشارة ق′(س) سالبة ، ق′(س) < ٠ ⟵ (– – – –)

أما إذا كان ق′(س) = ٠ ، فإن الاقتران ق(س) يكون اقتران ثابت على مجالهُ.

١ – ١ متوســــــــــــــــــط التغير

التفاضل والتكامل : فرع من فروع الرياضيات يدرس النهايات والاشتقاق والتكامل والمتسلسلات اللانهائية، وهو علم يستخدم لدراسة التغير في الاقترانات وتحليلها ، ويدخل علم التفاضل والتكامل في العديد من التطبيقات في الهندسة والعلوم المختلفة حيث كثيراً ما يحتاج إليه لدراسة سلوك الاقتران والتغير فيها وحل المشاكل التي يعجز علم الجبر عن حلها بسهولة ، وعادة ما يدرس علم التفاضل والتكامل بعد دراسة أساسيات الجبر والهندسة وحساب المثلثات.

ملخص الدرس

تعريف

ليكن الاقتران ص = ق(س) اقتراناً وتغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن :

التغير في قيمة س = $س_٢ - س_١$ ، ويرمز لهُ بالرمز Δس ويقرأ دلتا س .

التغير في قيمة ص = $ص_٢ - ص_١$ = ق($س_٢$) − ق($س_١$) ، ويرمز لهُ بالرمز Δص ويقرأ دلتا ص.

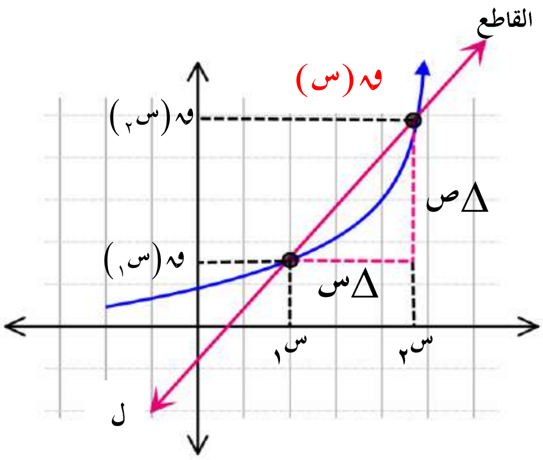
تعريف

ليكن الاقتران ق(س) اقتراناً وتغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن :

إعداد المعلم: سائد الحلاق

متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$ ، $س_١ \neq س_٢$

- متوسط التغير للاقتران هو ناتج قسمة التغير في ق(س) على التغير في س.



المفهوم الهندسي لمتوسط التغير

إذا قطع مستقيم منحنى الاقتران ، فإن ميل المستقيم القاطع ل يساوي:

متوسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

أمثلة محلولة

مثال ١

إذا كان متوسط تغير الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ عندما تتغير س من $\text{س}_{١} = ٢$ إلى $\text{س}_{٢} = ٥$ يساوي ٤ ، فما مقدار التغير في ص؟

الحل

متوسط التغير للاقتران $= \dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \dfrac{\Delta \text{ص}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

$$٤ = \dfrac{\Delta \text{ص}}{٥ - ٢} \leftarrow ٤ = \dfrac{\Delta \text{ص}}{٣} \leftarrow \Delta \text{ص} = ٤ \times ٣ = \boxed{١٢}$$

مثال ٢

احسب متوسط التغير في الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س} - ١$، عندما تتغير س من $\text{س}_{١} = ١$ إلى $\text{س}_{٢} = ٤$.

الحل

متوسط التغير $= \dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \dfrac{\text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

$$= \dfrac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(١)}{٤ - ١}$$

$$= \dfrac{(٣ \times ٤ - ١) - (٣ \times ١ - ١)}{٤ - ١} = \dfrac{١١ - ٢}{٣} = \dfrac{٩}{٣} = \boxed{٣}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ٣

ما متوسط التغير في الاقتران $\text{ق}(\text{س})$، بحيث $\text{ق}(-١) = -٣$ ، $\text{ق}(٢) = ٦$ عندما تتغير س من -١ إلى ٢ ؟

الحل

متوسط التغير $= \text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

$$= \dfrac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(-١)}{(٢) - (-١)} = \dfrac{(٦) - (-٣)}{٢ + ١} = \dfrac{٩}{٣} = \boxed{٣}$$

مثال ٤

احسب متوسط التغير في الاقتران ق(س)، عندما تتغير س من $س_١ = ٣$ إلى $س_٢ = ٦$ ، إذا علمت : $ق(٦) - ق(٣) = ١٢$

الحـــل

$$\text{متوسط التغير} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{ق(٦) - ق(٣)}{٦ - ٣} = \frac{١٢}{٣} = \boxed{٤}$$

مثال ٥

إذا كان الاقتران ص = ق(س) = ٢س + ١، وتغيرت س من $س_١ = ٢$ إلى $س_٢ = ٣$ ، فأجب عن الأسئلة التالية:

١) ما التغير في س ؟

$$\Delta س = س_٢ - س_١ = ٣ - ٢ = \boxed{١}$$

٢) ما التغير في قيمة الاقتران ق(س) ؟

$$\Delta ص = ق(س_٢) - ق(س_١) = ق(٣) - ق(٢) = (٢ \times ٣ + ١) - (٢ \times ٢ + ١) = ٧ - ٥ = \boxed{٢}$$

٣) احسب متوسط التغير في الاقتران ق(س)

$$\text{متوسط التغير} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{٢}{١} = \boxed{٢}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ٦

إذا كان الاقتران $ق(س) = \sqrt[٣]{س} + \sqrt{٧}$ ، جد متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٨]

الحـــل

$$\text{متوسط التغير} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{ق(٨) - ق(١)}{٨ - ١}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[٣]{٨} + \sqrt{٧}\right) - \left(\sqrt[٣]{١} + \sqrt{٧}\right)}{٨ - ١} = \frac{٢ + \cancel{\sqrt{٧}} - ١ - \cancel{\sqrt{٧}}}{٧} = \frac{٣ - ٢}{٧} = \boxed{\frac{١}{٧}}$$

مثال ٧

احسب متوسط التغير للاقتران ق(س) $= \sqrt{3\text{س}}$ ، عندما تتغير س$_2$ = ١٢ ، Δس = ٩ .

الحـــل

$$\text{س}_1 = 12 - 9 = 3$$

متوسط التغير $= \dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \dfrac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

$$= \frac{\text{ق}(12) - \text{ق}(3)}{12 - 3}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3 \times 12}\right) - \left(\sqrt{3 \times 3}\right)}{12 - 3} = \frac{\sqrt{36} - \sqrt{9}}{9} = \frac{6 - 3}{9} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

مثال ٨

إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س) = ٤، عندما تتغير س في الفترة [−٢، ١] ، وكان ق(−٢) = −٩ ، فجد ق(١).

الحـــل

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$4 = \frac{\text{ق}(1) - \text{ق}(-2)}{(1) - (-2)}$$

$$4 = \frac{\text{ق}(1) - -9}{3}$$

$$12 = \text{ق}(1) + (9)$$

$$\text{ق}(1) = 12 - 9 = \boxed{3}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ٩

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً ، حيث : ٤ق(٤) = ٨ + ٤ق(٢) ، جد متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٢، ٤]

الحـــل

$$4\text{ق}(4) = 8 + 4\text{ق}(2)$$

$$\boxed{\text{ق}(4) = 2 + \text{ق}(2)}$$

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{ق}(4) - \text{ق}(2)}{(4) - (2)}$$

$$= \frac{2 + \cancel{\text{ق}(2)} - \cancel{\text{ق}(2)}}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

مثال ١٠

إذا كان الاقتران ق(س) = ٢س + ٣ ، س ∈ ح ، وتغيرت س من $\text{س}_1 = ٢$ إلى $\text{س}_2 = \text{هـ} + ٢$.

أثبت أن متوسط تغير الاقتران ق(س) = ٢.

الحل

مديرية التربية والتعليم غرب غزة – مدرسة ذكور الثانوية للبنين – أ. سائد الحلاق

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$= \frac{\text{ق}(\text{هـ}+٢) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ} \cancel{+٢} \cancel{-٢}}$$

$$= \frac{(٢(\text{هـ}+٢)+٣) - ((٢\times٢)+٣)}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{٤ + ٢\text{هـ} + ٣ - ٧}{\text{هـ}} = \frac{٢\text{هـ} \cancel{+٧} \cancel{-٧}}{\text{هـ}} = \frac{٢\text{هـ}}{\text{هـ}} = \boxed{٢}$$

مثال ١١

إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٣] = ٤ ، وكان : هـ(س) = ق(س) − س ، جد متوسط تغير للاقتران هـ(س) لنفس الفترة.

الحل

إعداد المعلم : سائد الحلاق

متوسط التغير للاقتران ق(س) $= \frac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

$$٤ = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٣ - ١}$$

$٤ = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٢}$ (بالضرب التبادلي) ← ينتج أن : $\boxed{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١) = ٨}$

متوسط التغير للاقتران هـ(س) $= \frac{\text{هـ}(\text{س}_2) - \text{هـ}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

$$= \frac{\text{هـ}(٣) - \text{هـ}(١)}{٢}$$

$$= \frac{(\text{ق}(٣) - ٣) - (\text{ق}(١) - ١)}{٢}$$

$$= \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١) - ٣ + ١}{٢} = \frac{\boxed{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)} - ٢}{٢} = \frac{\boxed{٨} - ٢}{٢} = \frac{٦}{٢} = \boxed{٣}$$

مثال ١٢

إذا كـان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س في الفترة [١، ٥] هو ٦، جد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ٥ق(س) − ١ في نفس الفترة.

الحل

متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\frac{\text{ق}(\text{س}_2)-\text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2-\text{س}_1}$

$٦ = \frac{\text{ق}(٥)-\text{ق}(١)}{٥-١}$

$٦ = \frac{\text{ق}(٥)-\text{ق}(١)}{٤}$ (بالضرب التبادلي) ← ينتج أن : $\boxed{\text{ق}(٥)-\text{ق}(١)=٢٤}$

متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $\frac{\text{هـ}(\text{س}_2)-\text{هـ}(\text{س}_1)}{\text{س}_2-\text{س}_1}$

$= \frac{\text{هـ}(٥)-\text{هـ}(١)}{٥-١}$

$= \frac{(٥\text{ق}(٥)-١)-(٥\text{ق}(١)-١)}{٤}$

$= \frac{٥\text{ق}(٥)-\cancel{١}-٥\text{ق}(١)+\cancel{١}}{٤} = \frac{٥\text{ق}(٥)-٥\text{ق}(١)}{٤} = \frac{٥\left(\boxed{\text{ق}(٥)-\text{ق}(١)}\right)}{٤}$

$= \frac{٥\times\boxed{٢٤}}{٤} = \frac{١٢٠}{٤} = \boxed{٣٠}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ١٣

إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = ٥ − أس للفترة [٢ ، ٥] يساوي −٤ ، فما قيمة الثابت أ ؟

الحل

$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_2)-\text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2-\text{س}_1}$ ، $-٤ = \frac{\text{ق}(٥)-\text{ق}(٢)}{٥-٢}$

$-٤ = \frac{(٥-٥\text{أ})-(٥-٢\text{أ})}{٣}$ (بالضرب التبادلي)

$-١٢ = \cancel{٥}-٥\text{أ}-\cancel{٥}+٢\text{أ}$

$-١٢ = -٣\text{أ} \leftarrow \frac{-١٢}{-٣} = \frac{-٣\text{أ}}{-٣} \leftarrow \text{أ} = \boxed{٤}$

مثال ١٤

إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين (٣ ، ٥) ، (٦ ، −١٠) ، فما ميل القاطع ل ؟

الحـــل

$$\text{ميل القاطع ل} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-١٠ - ٥}{٦ - ٣} = \frac{-١٥}{٣} = \boxed{-٥}$$

مثال ١٥

وزاري : صفحة ٩

يقطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين (−٣، ٥) ، (−٤، ٢جـ) ،فإذا كان ميلهُ يساوي ٧ ،فما قيمة الثابت جـ ؟

الحـــل

$$\text{ميل القاطع ل} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$٧ = \frac{٢جـ - ٥}{-٤ - -٣}$$

$$٧ = \frac{٢جـ - ٥}{-١} \quad \text{(بالضرب التبادلي)}$$

$$٢جـ - ٥ = -٧ \leftarrow \frac{٢}{٢}جـ = \frac{-٢}{٢} \leftarrow جـ = \boxed{-١}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ١٦

يقطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين (−٢ ، ب) ، (٤ ، −٥) فإذا كان ميلهُ يساوي $\frac{٢}{٣}$ ،ما قيمة الثابت ب؟

الحـــل

$$\text{ميل القاطع ل} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$\frac{٢}{٣} = \frac{-٥ - ب}{٤ - -٢} \leftarrow \frac{٢}{٣} = \frac{-٥ - ب}{٦} \quad \text{(بالضرب التبادلي)}$$

$$١٢ = ٣(-٥ - ب) \leftarrow ١٢ = -١٥ - ٣ب$$

$$١٢ + ١٥ = -٣ب \leftarrow ٢٧ = -٣ب \leftarrow \frac{٢٧}{-٣} = \frac{\cancel{-٣}ب}{\cancel{-٣}} \leftarrow \boxed{ب = -٩}$$

متوسط التغير (١-١)

حلول الكتاب الوزاري صفحة ٩

١) أ

متوسط التغير للاقتران ق(س) $= \dfrac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \dfrac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(٠)}{٣ - ٠}$

$$= \dfrac{(٦ - ٢\times٣) - (٦ - ٢\times٠)}{٣} = \dfrac{٠ - ٦}{٣} = \dfrac{-٦}{٣} = \boxed{-٢}$$

ب

متوسط التغير للاقتران هـ(س) $= \dfrac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \dfrac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٢)}{٥ - ٢}$

$$= \dfrac{(٥^٢ + ٢) - (٢^٢ + ٢)}{٣} = \dfrac{٢٧ - ٦}{٣} = \dfrac{٢١}{٣} = \boxed{٧}$$

جـ

متوسط التغير للاقتران ل(س) $= \dfrac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \dfrac{\text{ق}(٦) - \text{ق}(-١)}{٦ - -١}$

$$= \dfrac{\left(\sqrt[٣]{٦ + ٢}\right) - \left(\sqrt[٣]{-١ + ٢}\right)}{٧} = \dfrac{٢ - ١}{٧} = \boxed{\dfrac{١}{٧}}$$

٢)

متوسط التغير = ميل القاطع $= \dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \dfrac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

$$٣ = \dfrac{(٤) - (-٢)}{(\text{جـ}) - (١)} \leftarrow ٣\text{جـ} - ٣ = ٦ \leftarrow \dfrac{٣}{٣}\text{جـ} = \dfrac{٩}{٣} \leftarrow \text{جـ} = \boxed{٣}$$

٣)

متوسط التغير للاقتران ق(س) $= \dfrac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

$٥ = \dfrac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٢)}{٢}$ (بالضرب التبادلي) ← ينتج أن : $\boxed{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٢) = ١٠}$

متوسط التغير للاقتران هـ(س) $= \dfrac{\text{هـ}(\text{س}_٢) - \text{هـ}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \dfrac{\text{هـ}(٤) - \text{هـ}(٢)}{٤ - ٢}$

$$= \dfrac{(٣\text{ق}(٤) - ٢) - (٣\text{ق}(٢) - ٢)}{٢}$$

$$= \dfrac{٣\text{ق}(٤) - \cancel{٢} - ٣\text{ق}(٢) + \cancel{٢}}{٢} = \dfrac{٣\text{ق}(٤) - ٣\text{ق}(٢)}{٢} = \dfrac{٣[\text{ق}(٤) - \text{ق}(٢)]}{٢}$$

$$= \dfrac{٣\times١٠}{٢} = \dfrac{٣٠}{٢} = \boxed{١٥}$$

إعداد المعلم سائد الحلاق

٤

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$$

$$-٩ = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٢}$$

$$-٩ = \frac{(\text{أ}\times ٣^{٢} - ٥\times ٣) - (\text{أ}\times ١^{٢} - ٥\times ١)}{٢}$$ (بالضرب التبادلي)

$$-١٨ = (٩\text{أ} - ١٥) - (\text{أ} - ٥)$$

$$-١٨ = ٩\text{أ} - ١٥ - \text{أ} + ٥$$

$$-١٨ = ٨\text{أ} - ١٠$$

$$-٨ = ٨\text{أ}$$

$$\frac{-٨}{٨} = \frac{٨}{٨}\text{أ} \leftarrow \text{أ} = \boxed{-١}$$

٥

متوسط التغير للاقتران ق(س) $= \frac{\text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

$$= \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٣)}{٥ - ٣}$$

$$-٢ = \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٣)}{٥ - ٣}$$

$$-٢ = \frac{\text{ق}(٥) - ٨}{٢}$$ (بالضرب التبادلي)

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$$-٤ = \text{ق}(٥) - ٨$$

$$\leftarrow \text{ق}(٥) = -٤ + ٨ = \boxed{٤}$$

٦

متوسط التغير = ميل القاطع $= \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

$$= \frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(-٦)}{٢ - (-٦)}$$

$$= \frac{٠ - ٥}{٨}$$

$$= \boxed{-\frac{٥}{٨}}$$

ورقة عمل ١ - ١   متوسط التغير

أولاً   إختر الإجابة الصحيحة

١) إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين (٣ ، -٨) ، (-١، ٤) ، فما متوسط التغير للاقتران ق(س)؟

أ ٣   ب -٣   ج -١   د ٢

٢) يقطع المستقيم م منحنى الاقتران هـ(س) في النقطتين (٤ ، ٣ب) ، (٣ ، ١) ، فإذا كان ميلهُ يساوي ٢ ، فما قيمة ب ؟

أ -١   ب $\frac{١}{٣}$ ج -٣   د ١

٣) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = $\frac{٣}{٤}$ وكان Δص = ٦ ، فما قيمة Δس ؟

أ ١٤   ب ٨   ج ٦   د -٨

٤) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٢ إلى ٦ هو ٣ ، فما قيمة Δص ؟

أ ٤   ب $\frac{٤}{٣}$ ج -١٢   د ١٢

٥) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) للفترة [-١ ، ٣] يساوي $\frac{١}{٤}$ ، وكان ق(٣) = ٢، فما قيمة ق(-١) ؟

أ ٤   ب ٢   ج ١   د -١

٦) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) للفترة [-٢ ، ٢] يساوي ٤ ، وكان ق(-٢) = ١، فما قيمة ق(٢)؟

إعداد المعلم : سائد الحلاق

أ ١٧   ب -١٥   ج ١٥   د ٣

٧) ما متوسط تغير الاقتران ق(س) للفترة [٢ ، ٤] ، إذا علمت أن : ق(٤) - ق(٢) = ٦ ؟

أ ٣   ب $\frac{١}{٣}$ ج -٣   د ٢

٨) ما متوسط تغير الاقتران ق(س) = $\frac{١}{٢}$س - ١ عندما تتغير س من $س_١$ = -٢ إلى $س_٢$ = ٤ ؟

أ -١   ب ١   ج $\frac{١}{٢}$ د ٢

٩) ما متوسط تغير الاقتران ق(س) = $\frac{\sqrt{س}}{٢}$ ، عندما تتغير س من $س_١$ = ١ إلى $س_٢$ = ٩ ؟

أ ٨   ب $\frac{١}{٨}$ ج -$\frac{١}{٨}$ د ١

١٠ فلسطين : ٢٠٢٠

ما ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣س^{٢} − ٢ المار بالنقطتين (−١، ق(−١))، (٢، ق(٢)) ؟

أ ١٢ ب ٦ ج ٣ د −٦

١١ فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كان : ق(٥) − ق(−٢) = ٢٨، فما متوسط تغير الاقتران ق(س) في [−٢، ٥] ؟

أ −٤ ب ٤ ج $\frac{٢٨}{٣}$ د ٢٨

١٢ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

ليكن ق(س) = $\frac{١}{س}$، س ≠ ٠ ، ما قيمة متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ = $\frac{١}{٢}$ إلى س$_{٢}$ = ٢ ؟

أ −$\frac{٣}{٢}$ ب −٢ ج −١ د ١

١٣ فلسطين : ٢٠١٩

إذا كان : ق(٣) − ق(١) = −١٦ ، ما متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ = ١ إلى س$_{٢}$ = ٣ ؟

أ −٨ ب ٢ ج ٨ د ١٦

١٥ شرق غزة : ٢٠١٩ تجريبي

ما ميل القاطع الذي يقطع منحنى الاقتران ق(س) = ٣س^{٢} + ٢ ، عند س$_{١}$ = −١ ، س$_{٢}$ = ٢ ؟

أ ٣ ب −٦ ج ١٢ د ٩

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١٦ فلسطين : ٢٠١٨

إذا كانت النقطتان أ(−١ ، ٢) ، ب(٢ ، ٥) تقعان على منحنى الاقتران ص = ق(س) فإن متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من −١ إلى ٢ يساوي:

أ −٣ ب −١ ج ١ د ٣

١٧ فلسطين : ٢٠١٧ إكمال

إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ = أ إلى س$_{٢}$ = ٥ هو ٢ ، وكان ق(٥) = ٧، ق(أ) = ٣،

فإن قيمة أ تساوي:

أ صفر ب ١ ج −٣ د ٣

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال	الجواب النهائي
١	أوجد متوسط التغير للاقتران ق(س) = ٢س + ٣ للفترة [٤ ، ٤,٥]	٢
٢	احسب متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\sqrt{٢س + ٢}$ ، عندما تتغير س في [$\frac{١}{٢}$ ، ٨]	$\frac{٢}{٥}$
٣	أوجد متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\frac{٢}{س}$ ، س ≠ ٠ عند س$_١$ = $\frac{١}{٢}$ ، س$_٢$ = ١	−٤
٤	احسب متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\sqrt{٢س + ٩}$ ، في الفترة [٠ ، ٨]	−$\frac{١}{٤}$
٥	إذا كان متوسط التغير للاقتران هـ(س) = س^٢ + ٣ ، للفترة [ب ، ٢] يساوي ٩ ، فما قيمة الثابت ب ؟	٧ ٢ مرفوض
٦	إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) = جـس + ٦ ، للفترة هو − ٢ عندما تتغير س من ٣ إلى ٦ ، فما قيمة / قيمة الثابت جـ ؟	−٢
٧	إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) = ٢س^٢ + ٣س − ٥ ، للفترة [ل ، ٣ل] يساوي ١١ ، فما قيمة الثابت ل ؟	١ الصفر مرفوض
٨	إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) يساوي ٥ ، حيث تتغير س من س$_١$ = ٢ إلى س$_٢$ = أ ، وكان ق(٢) = ٧ ، ق(أ) = ٢ ، فما قيمة الثابت أ ؟	١
٩	إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س في الفترة [١ ، ٤] يساوي ٨ ، جد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ٢ق(س) − س في تلك الفترة.	١٥
١٠	فلسطين : ٢٠٢٠ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) على [٣ ، ٥] يساوي ٧ ، جد متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ٢س + ق(س) على [٣ ، ٥].	٩
١١	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = أس^٢ − ٤س على [١ ، ٣] يساوي ١٢ ، جد قيمة الثابت أ ؟	٢

إعداد المعلم: سائد الحلاق

١٢	قباطية : ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) على [٢، ٤] يساوي ٥، جد متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ٣ق(س) − ٢ في تلك الفترة.	١٥
١٣	أريحا : ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) على [١، ٥] يساوي ٧، جد متوسط تغير الاقتران ل(س) = $\frac{٢}{٣}$ق(س) + ٤ في تلك الفترة.	$\frac{١٤}{٣}$
١٤	شرق خانيونس: ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) على [١، ٥] يساوي −٦، وكان ك(س) = ٢س ق(س) حيث منحنى ك(س) يمر بالنقطة (١، −٦). جد متوسط تغير الاقتران ك(س) لتلك الفترة.	−٦٦
١٥	قلقيلية: ٢٠٢٠ إكمال إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) على [−٤، ٢] يساوي ٥، وكان متوسط تغير الاقتران هـ(س) = أ ق(س) + ٤ على نفس الفترة يساوي ١٥ ، أجد قيمة الثابت أ	٣
١٦	فلسطين : ٢٠١٨ إذا كان ق(س) = $\sqrt{٥س + ١}$، و تتغير س من $س_١$ = ٠ إلى $س_٢$ = ٣ ، فجد متوسط التغير	١
١٧	فلسطين: ٢٠٠٨ إذا كان الاقتران ص = ق(س) = $س^٢$ وتغيرت س من $س_١$ = ١ إلى $س_٢$ = ٣ ، فجد متوسط التغير.	٤
١٨	فلسطين : ٢٠٠٧ إذا كان الاقتران ص = ق(س) اقتراناً وكان متوسط تغير الاقتران ق(س) للفترة [٢ ، ٥] هو ١٠ فجد ق(٥) علماً بأن ق(٢) = ٦	٣٦

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١ – ٢ المشتقة الأولى

ملخص الدرس

- يرمز للمشتقة الأولى بأكثر ص = ق(س) = ٢س + ١ من رمز (ص′ ، ق′ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$)
- $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ وحدة واحدة ولا تعامل معاملة كسر مكون من بسط ومقام (لا تعامل كنسبة) وتقرأ : (دال صاد دال سين).

قواعد الاشتقاق

قاعدة ١

- إذا كان ص = ق(س) = أ ، حيث أ عدد حقيقي ، فإن ق′ = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = صفر
- مشتقة الاقتران الثابت يساوي صفراً.

قاعدة ٢

- إذا كان ص = أس + ب ، حيث أ ، ب عددان حقيقيان ، فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = أ

إعداد المعلم: سائد الحلاق

قاعدة ٣

- إذا كان ق(س) = س^ن ، فإن ق′ = ن س^(ن−١) ، حيث :ن عدد حقيقي ، س ≠ ٠ ، س ≠ ٠

قاعدة ٤

- إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، وكان أ عدداً حقيقياً ، أ ≠ ٠ ، فإن الاقتران هـ(س) = أ ق(س) هو اقتران قابل للاشتقاق ، وتكون هـ′(س) = أ ق′(س).

أمثلة محلولة

مثال ١

جد مشتقة كل من الاقترانات التالية:

١) $ص = ٧$ ← $ص' = ٠$

٢) $ص = -٥$ ← $ص' = ٠$

٣) $ص = \pi$ ← $\frac{دص}{دس} = ٠$

٤) $ق(س) = ٥س$ ← $ق'(س) = ٥$

٥) $ق(س) = -٢س$ ← $ق'(س) = -٢$

٦) $ق(س) = س + ٧$ ← $ق'(س) = ١$

٧) $ق(س) = ٤س - ٥$ ← $ق'(س) = ٤$

٨) $٤ص = ٨س$ ← $\frac{٤}{٤}ص = \frac{٨}{٤}س$ ← $ص = ٢س$ ← $\frac{دص}{دس} = ٢$

٩) $ق(س) = س^{٣}$ ← $ق'(س) = ٣س^{٣-١}$ ← $ق'(س) = ٣س^{٢}$

١٠) $ق(س) = س^{-٣}$ ← $ق'(س) = -٣س^{-٣-١}$ ← $ق'(س) = -٣س^{-٤}$

١١) $ق(س) = -٢س^{٥}$ ← $ق'(س) = ٥ \times -٢س^{٤}$ ← $ق'(س) = -١٠س^{٤}$

١٢) $ق(س) = \sqrt{س}$ ← $ق(س) = س^{\frac{١}{٢}}$ ← $ق'(س) = \frac{١}{٢}س^{\frac{١}{٢}-١}$ ← $ق'(س) = \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} = \boxed{\frac{١}{٢\sqrt{س}}}$

١٣) $ق(س) = \sqrt[٣]{س}$ ← $ق(س) = س^{\frac{١}{٣}}$ ← $ق'(س) = \frac{١}{٣}س^{\frac{١}{٣}-١}$ ← $ق'(س) = \frac{١}{٢}س^{-\frac{٢}{٣}} = \boxed{\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}}$

١٤) $ق(س) = \sqrt[٥]{س^{٤}}$ ← $ق(س) = س^{\frac{٤}{٥}}$ ← $ق'(س) = \frac{٤}{٥}س^{\frac{٤}{٥}-١}$ ← $ق'(س) = \frac{٤}{٥}س^{-\frac{١}{٥}} = \boxed{\frac{٤}{٥\sqrt[٥]{س}}}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

مثال ٢

إذا كان الاقتران ق(س) = −٣س^٣ + ١، جد ق′(٢).

الحـــل

ق′(س) = −٩س^٢

ق′(٢) = −٩ × (٢)^٢ = −٩ × ٤ = $\boxed{-٣٦}$

مدرسة شهداء النصيرات الثانوية للبنين – أ. سائد الحلاق – مديرية غرب غزة

مثال ٣

إذا كان الاقتران ق(س) = أس^٤، وكان ق′(٣) = ٢١٦ .جد قيمة الثابت أ .

الحـــل

ق′(س) = ٤أ س^٣

ق′(٣) = ٤ × أ × (٣)^٣

٢١٦ = ٤ × أ × ٢٧

٢١٦ = ١٠٨ أ ← أ = $\frac{٢١٦}{١٠٨}$ = $\boxed{٢}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

مثال ٤

اذا كان ٢هـ(س) = −٨ق(س) + ١، وكان هـ′(٢) = ٤ ، فما قيمة ق′(٢) ؟

الحـــل

٢هـ′(س) = −٨ق′(س)

٢هـ′(٢) = −٨ق′(٢)

٢ × ٤ = −٨ق′(٢)

٨ = −٨ق′(٢) ← ق′(٢) = $\boxed{-١}$

المشتقة الأولى (١-٢)

حلول الكتاب الوزاري صفحة ١٣

١

أ) $\text{ق}'(\text{س}) = ٠ \leftarrow \text{ق}'(١٠٠) = \boxed{٠}$

ب) $\text{ص}' = ٣ \leftarrow \text{ص}'(١٢) = \boxed{٣}$

جـ) $\text{ك}'(\text{س}) = ١ \leftarrow \text{ك}'(-٧) = \boxed{١}$

د) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\frac{٥}{٣}}$

$$\leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{٥}{٣}\text{س}^{\frac{٢}{٣}} \leftarrow \text{ق}'(١) = \frac{٥}{٣} \times (١)^{\frac{٢}{٣}} = \frac{٥}{٣} \times ١ = \boxed{\frac{٥}{٣}}$$

هـ) $\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^٢ \leftarrow \text{ق}'(-١) = ٣ \times (-١)^٢ = \boxed{٣}$

٢

أ) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٦٤}{٥\text{س}^٥} \text{ ، س} \neq ٠$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٦٤}{٥}\text{س}^{-٥}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = -٥ \times \frac{٦٤}{٥} \times \text{س}^{-٦} = ٦٤\text{س}^{-٦} = \boxed{\frac{-٦٤}{\text{س}^٦}}$$

ب) $\text{ق}'(\text{س}) = \boxed{٠}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

جـ) $\text{ق}'(\text{س}) = \boxed{٢٠\text{س}^٣}$

٣

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٦ \times \text{ق}'(\text{س})$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}(٥) = ٦ \times \text{ق}'(٥) = ٦ \times ٧ = \boxed{٤٢}$$

٤

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{أس}^٢$$

$$\leftarrow \text{ق}'(٢) = ٣ \times \text{أ} \times (٢)^٢ = ٦٠$$

$$\leftarrow \frac{١٢}{١٢}\text{أ} = \frac{٦٠}{١٢} \leftarrow \text{أ} = \boxed{٥}$$

ورقة عمل ١ – ٢ — المشتقة الأولى

فكر — إختر الإجابة الصحيحة

١) إذا كان الاقتران ق(س) = $\frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٣}} + \sqrt[٣]{س}$ ، فما قيمة ق′(١)؟

أ) −١ ب) $\frac{٣}{٢}$ جـ) $-\frac{١}{٣}$ د) ١

٢) إذا كان الاقتران ص = ٣π ، فما قيمة $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = $\sqrt{١٠٠}$ ؟

أ) ٠ ب) π جـ) ٣ د) ١٠٠

٣) إذا كان الاقتران ص = $\frac{٣}{٤}$س^{٤} ، فما قيمة $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = −٢ ؟

أ) ٨ ب) −٢٤ جـ) ٢٤ د) ١٢

٤) إذا كان الاقتران هـ(س) = $\sqrt{٣}$س^{٢} ، فإن هـ′(س) هو :

أ) ٢$\sqrt{٣}$ ب) ٢$\sqrt{٣}$س^{٣} جـ) ٢$\sqrt{٣}$س^{٢} د) ٢$\sqrt{٣}$س

٥) إذا كان الاقتران ق(س) = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ ، فما قيمة ق′(١)؟

أ) $\frac{٢}{٣}$ ب) $-\frac{٢}{٣}$ جـ) $-\frac{١}{٣}$ د) $\frac{٣}{٢}$

٦) إذا كان الاقتران ق(س) = $\frac{١}{س^{-٣}}$ − ٣ ، فما قيمة ق′(−٢)؟

أ) −٤٨ ب) −١٢ جـ) ١٢ د) ٤٨

٧) إذا كان الاقتران ق(س) = ب س$^{-١}$ ، وكان ق′(−٢) = ١٦ .فما قيمة الثابت ب؟

أ) −٦٤ ب) ٤ جـ) ٦٤ د) −١٦

٨) اذا كان ق(س) = −٣هـ(س) ، وكان هـ′(٢) = ٩ ، فما قيمة ق′(٢) ؟

أ) −٦ ب) ٢٧ جـ) −٢٧ د) −٣

٩) إذا كان الاقتران ق(س) = ٢س^{٣} ، هـ(س) = ٥س$^{-٤}$ ، فما قيمة (ق − هـ)′(١) ؟

أ) ٢٦ ب) −٢٦ جـ) −١٤ د) ١٤

إعداد المعلم سائد الحلاق

(١٠) فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان الاقتران هـ(س) = ٣ق(س) ، وكان هـ′(٢) = ٦ ، فما قيمة ق′(٢) ؟

أ ١٨	ب ٢	جـ −٢	د ١٢

(١١) فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كان هـ(س) = ٣س^{٢} − أس^{٣} ، هـ′(−١) = ٦ ، فما قيمة الثابت أ ؟

أ ٠	ب −٢	جـ −٤	د ٤

(١٢) فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كان ق(س) = $\frac{٨}{س^{٢}}$ ، فما قيمة ق′(−٢) ؟

أ ٠	ب −٢	جـ ٢	د ٤

(١٣) فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٨ ، هـ(س) = ٢ − ٢س ، فما قيمة $\frac{ق′(٣)}{هـ′(٣)}$ ؟

أ −٣	ب −٦	جـ $\frac{٥}{٨}$	د −$\frac{١٧}{٤}$

(١٤) فلسطين : ٢٠١٨

إذا كان : ق(س) = ٢ $\sqrt{س}$ ، فإن ق′(٤)

أ $\frac{١}{٤}$	ب $\frac{١}{٢}$	جـ ١	د ٢

إعداد المعلم : سائد الحلاق

(١٥) فلسطين : ٢٠١٣ إكمال

إذا كان : ل(س) = ٢ق(س) − ٤هـ(س) ، وكانت ق′(٢) = ٣ ، هـ′(٢) = −٤ ، فإن ل′(٢) =

أ −٢٠	ب −١٠	جـ ٧	د ٢٢

(١٦) فلسطين : ٢٠١٢ إكمال

إذا كان : ٢ق(س) + ٣هـ(س) = −٢س ، وكان هـ′(٢) = ٤ ، فإن ق′(٢) =

أ −٧	ب −٥	جـ ٥	د ٧

(١٧) فلسطين : ٢٠١٠

إذا كان : هـ(س) = س + ق(س) ، وكان هـ′(٢) = ٤ ، فإن ق′(٢) =

أ ٢	ب ٣	جـ ٤	د ٥

١ – ٣ قواعد الاشتقاق

ملخص الدرس

قواعد الاشتقاق

قاعدة١ الجمع والطرح

- إذا كان $\text{ق}(\text{س})$، $\text{هـ}(\text{س})$ اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان $\text{ك}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س})$، فإن : الاقتران $\text{ك}(\text{س})$ يكون قابلاً للاشتقاق ، ويكون $\text{ك}'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{س}) \pm \text{هـ}'(\text{س})$

قاعدة٢ الضرب

- إذا كان $\text{ق}(\text{س})$، $\text{هـ}(\text{س})$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند $\text{س} = \text{أ}$ ، فإن :

$$(\text{ق} \times \text{هـ})'(\text{أ}) = \text{ق}(\text{أ}) \times \text{هـ}'(\text{أ}) + \text{هـ}(\text{أ}) \times \text{ق}'(\text{أ})$$

أي أن : مشتقة حاصل ضرب اقترانين= الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

إعداد المعلم : سائد الحلاق

قاعدة٣ القسمة

- إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ ، $\text{هـ}(\text{س})$ اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان $\text{هـ}(\text{س}) \neq 0$ عند $\text{س} = \text{أ}$ ، فإن :

$$(\text{ق} \div \text{هـ})'(\text{أ}) = \frac{\big(\text{هـ}(\text{أ}) \times \text{ق}'(\text{أ})\big) - \big(\text{ق}(\text{أ}) \times \text{هـ}'(\text{أ})\big)}{\big(\text{هـ}(\text{أ})\big)^2}$$

أي أن : مشتقة حاصل ضرب اقترانين = $\dfrac{\text{(المقام × مشتقة البسط)} - \text{(البسط × مشتقة المقام)}}{\text{مربع المقام}}$

- إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{أ}}{\text{هـ}(\text{س})}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) \neq 0$ ، $\text{أ} \in \text{ح}$

فإن : $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{-\text{أ}\,\text{هـ}'(\text{س})}{\big(\text{هـ}(\text{س})\big)^2}$

أمثلة محلولة

مثال ١

إذا كان الاقتران $ق(س) = ٢س^{٥}$ ، $هـ(س) = ٣س^{-٤}$ ، أجد : $(ق+هـ)'(١)$

الحل

$ق'(س) = ١٠س^{٤}$ ، $هـ'(س) = -١٢س^{-٥}$

$(ق+هـ)'(س) = ١٠س^{٤} + -١٢س^{-٥}$

$(ق+هـ)'(١) = ١٠(١)^{٤} + -١٢(١)^{-٥} = (١٠×١) - (١٢×١) = ١٠ - ١٢ = \boxed{-٢}$

مثال ٢

إذا كان الاقتران $ق(س) = ١٠س^{٢} + ٥$ ، $هـ(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - ٣س$ ، أجد : $(ق-هـ)'(٢)$

الحل

$ق'(س) = ٢٠س$ ، $هـ'(س) = س^{٢} - ٣$

$(ق-هـ)'(س) = (٢٠س) - (س^{٢} - ٣)$

$(ق-هـ)'(٢) = (٢٠×٢) - ((٢)^{٢} - ٣) = ٤٠ - ١ = \boxed{٣٩}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

مثال ٣

إذا كان الاقتران $ق(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - س^{٢} + ٥س - ٣$ ، ما قيمة / قيم س التي تجعل $ق'(س) = ١٣$ ؟

الحل

$ق'(س) = س^{٢} - ٢س + ٥$

$١٣ = س^{٢} - ٢س + ٥$

$س^{٢} - ٢س + ٥ - ١٣ = ٠ \leftarrow س^{٢} - ٢س - ٨ = ٠$

$(س - ٤)(س + ٢) = ٠$

إما $(س - ٤) = ٠ \leftarrow \boxed{س = ٤}$ أو $(س + ٢) = ٠ \leftarrow \boxed{س = -٢}$

مثال ٤

إذا كان الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٣}} + \text{ب}^{٢}\,\text{س} + ٧$، وكان $\text{ق}'(٤) = ٢٨$ ، فما قيمة / قيم ب ؟

الحل

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ب}^{٢}\,\text{س} + ٧$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٣}{٢}\,\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{ب}^{٢}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٣}{٢}\sqrt{\text{س}} + \text{ب}^{٢}$$

$$\text{ق}'(٤) = \frac{٣}{٢}\sqrt{٤} + \text{ب}^{٢}$$

$$٢٨ = \frac{٣}{٢} \times ٢ + \text{ب}^{٢}$$

$$٢٨ = \frac{٣}{\cancel{٢}} \times \cancel{٢} + \text{ب}^{٢}$$

$$٢٨ = ٣ + \text{ب}^{٢}$$

$$٢٨ - ٣ = \text{ب}^{٢}$$

$$\text{ب}^{٢} = ٢٥ \leftarrow \sqrt{\text{ب}^{٢}} = \sqrt{٢٥} \leftarrow \text{ب} = \boxed{\pm ٥}$$

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}^{\text{م}}} = \text{أ}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$$

مدرسة التقوى الثانوية للبنين
أ. سائد الحلاق

مثال ٥

إذا كان الاقتران $\text{ص} = ٣\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} - ٧\,\text{س} + ٥$، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند $\text{س} = -٢$

الحل

إعداد المعلم: سائد الحلاق

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٩\text{س}^{٢} + ١٠\,\text{س} - ٧$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=-٢} = ٩ \times (-٢)^{٢} + (١٠ \times -٢) - ٧ = ٣٦ - ٢٠ - ٧ = \boxed{٩}$$

مثال ٦

إذا كان الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}^{٣}} - \text{س}^{٢}$ ، جد $\text{ق}'(١)$.

الحل

$$\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{-٣} - \text{س}^{٢}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = -٦\text{س}^{-٤} - ٢\text{س}$$

$$\text{ق}'(١) = -٦ \times (١)^{-٤} - ٢ \times ١ = -٦ - ٢ = \boxed{-٨}$$

مثال ٧

إذا كان الاقتران $ق(س) = (س^{٢} - ٧)(٣س + ٥)$ ، جد $ق'(١)$.

الحل

نطبق : مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

$ق'(س) = (س^{٢} - ٧) \times (٣) + (٣س + ٥)(٢س)$

$ق'(١) = (١^{٢} - ٧) \times (٣) + (٣ \times ١ + ٥) \times (٢ \times ١) = -١٨ + ١٦ = \boxed{-٢}$

مثال ٨

إذا كان الاقتران $ق(س) = (س^{٢} + س - ١)(جـ س + ٣)$ ، وكان $ق'(١) = ٢١$ ، فما قيمة / قيم الثابت جـ؟

الحل

نطبق : مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

$ق'(س) = (س^{٢} + س - ١)(جـ) + (جـ س + ٣)(٢س + ١)$

$ق'(١) = (١^{٢} + ١ - ١)(جـ) + (جـ \times ١ + ٣)(٢ \times ١ + ١)$

$٢١ = جـ + (جـ + ٣)(٣)$

$٢١ = جـ + ٣جـ + ٩$

$٢١ = ٤جـ + ٩ \leftarrow ٢١ - ٩ = ٤جـ$

$١٢ = ٤جـ \leftarrow \frac{١٢}{٤} = \frac{٤}{٤} جـ \leftarrow جـ = \boxed{٣}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ٩

إذا كان $ص = ق(س)$ اقتراناً ، حيث : $ق(س) = ٢س^{٢} \times ٣هـ(س)$ ، جد $ق'(١)$ علماً بأن $هـ(١) = ٢$ ، $هـ'(١) = ٣$

الحل

$ق'(س) = ٢س^{٢} \times ٣هـ'(س) + ٣هـ(س) \times ٤س$

$ق'(١) = ٢ \times (١)^{٢} \times ٣هـ'(١) + ٣هـ(١) \times ٤ \times ١$

$ق'(١) = ٢ \times ٣ \times ٣ + ٣ \times ٢ \times ٤ = ١٨ + ٢٤ = \boxed{٤٢}$

مثال ١٠

إذا كان ك(س) = ٢ق(س) × هـ(س) ، جد ك′(٢) علماً بأن:

ق(٢) = −١ ، ق′(٢) = ٤ ، هـ(٢) = −٢ ، هـ′(٢) = −٣

الحـــل

ك′(س) = ٢ق (س) × هـ′(س) + هـ(س) × ٢ق′(س)

ك′(٢) = ٢ق (٢) × هـ′(٢) + هـ(٢) × ٢ق′(٢)

ك′(٢) = ٢ × −١ × −٣ + −٢ × ٢ × ٤ = ٦ + −١٦ = $\boxed{-١٠}$

مثال ١١

إذا كان (ق × هـ)′ (٣) = ٣٠ ، وكان : ق(٣) = −٤ ، ق′(٣) = ٥ ، هـ(٣) = ١٠ ، جد هـ′(٣)

الحـــل

(ق × هـ)′ (٣) = ق (٣) × هـ′(٣) + هـ(٣) × ق′(٣)

٣٠ = −٤ × هـ′(٣) + ١٠ × ٥

٣٠ = −٤هـ′(٣) + ٥٠

٣٠ − ٥٠ = −٤هـ′(٣)

−٤هـ′(٣) = −٢٠ ← $\frac{-٤}{-٤}$هـ′(٣) = $\frac{-٢٠}{-٤}$ ← هـ′(٣) = $\boxed{٥}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ١٢

إذا كان (٢ق × ٤هـ)′ (٥) = ٦٤ ، وكان : ق(٥) = −٢ ، هـ(٥) = ٤ ، هـ′(٥) = ٦ ، جد ق′(٥)

الحـــل

(٢ق × ٤هـ)′ (٥) = ٢ق (٥) × ٤هـ′(٥) + ٤هـ(٥) × ٢ق′(٥)

٦٤ = ٢ × −٢ × ٤ × ٦ + ٤ × ٤ × ٢ق′(٥)

٦٤ = −٩٦ + ٣٢ ق′(٥)

٦٤ + ٩٦ = ٣٢ ق′(٥) ← ٣٢ ق′(٥) = ١٦٠ ← ق′(٥) = $\boxed{٥}$


مثال ١٣

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{٢س}^{٢}+\text{٣}}{\text{٣س}-\text{٣}}$ ، جد $\text{ق}'(\text{٢})$

الحـــل

نطبق : مشتقة حاصل ضرب اقترانين = $\frac{\text{(المقام × مشتقة البسط) − (البسط × مشتقة المقام)}}{\text{مربع المقام}}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{٣س}-\text{٣})\times(\text{٤س}) - (\text{٢س}^{٢}+\text{٣})\times(\text{٣})}{(\text{٣س}-\text{٣})^{٢}}$$

$$\text{ق}'(\text{٢}) = \frac{(\text{٣}\times\text{٢}-\text{٣})\times(\text{٤}\times\text{٢}) - (\text{٢}\times\text{٢}^{٢}+\text{٣})\times(\text{٣})}{(\text{٣}\times\text{٢}-\text{٣})^{٢}}$$

$$\text{ق}'(\text{٢}) = \frac{\text{٣}\times\text{٨} - \text{١١}\times\text{٣}}{(\text{٣})^{٢}} = \frac{\text{٢٤}-\text{٣٣}}{\text{٩}} = \frac{-\text{٩}}{\text{٩}} = \boxed{-\text{١}}$$

مثال ١٤

ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{٣س}+\text{١}}{\text{هـ}(\text{س})}$ ، أجد $\text{ق}'(\text{٣})$ ، إذا علمت أن : $\text{هـ}(\text{٣}) = -\text{٢}$ ، $\text{هـ}'(\text{٣}) = \text{١}$

الحـــل

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\left(\text{هـ}(\text{س})\times\text{٣}\right) - \left((\text{٣س}+\text{١})\times\text{هـ}'(\text{س})\right)}{\left(\text{هـ}(\text{س})\right)^{٢}} \leftarrow \text{ق}'(\text{٣}) = \frac{\left(\text{هـ}(\text{٣})\times\text{٣}\right) - \left((\text{٣}\times\text{٣}+\text{١})\times\text{هـ}'(\text{٣})\right)}{\left(\text{هـ}(\text{٣})\right)^{٢}}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$$\text{ق}'(\text{٣}) = \frac{-\text{٢}\times\text{٣} - \text{١٠}\times\text{١}}{(-\text{٢})^{٢}} = \frac{-\text{٦}+-\text{١٠}}{\text{٤}} = \frac{-\text{١٦}}{\text{٤}} = \boxed{-\text{٤}}$$

مثال ١٥

إذا كان $(\text{ق}\div\text{هـ})'(\text{١}) = \text{٢٠}$ ، وكان : $\text{ق}(\text{١}) = \text{٣}$، $\text{ق}'(\text{١}) = \text{١}$ ، $\text{هـ}(\text{١}) = \text{٢}$ ، جد $\text{هـ}'(\text{١})$

الحـــل

$$(\text{ق}\div\text{هـ})'(\text{١}) = \frac{\text{هـ}(\text{١})\times\text{ق}'(\text{١}) - \text{ق}(\text{١})\times\text{هـ}'(\text{١})}{\left(\text{هـ}(\text{١})\right)^{٢}} \leftarrow \text{٢٠} = \frac{(\text{٢}\times\text{١}) - \text{٣}\times\text{هـ}'(\text{١})}{(\text{٢})^{٢}}$$

$$\text{٢٠} = \frac{(\text{٢}) - \left(\text{٣هـ}'(\text{١})\right)}{\text{٤}} \leftarrow \text{٨٠} = (\text{٢}) - \left(\text{٣هـ}'(\text{١})\right) \leftarrow \text{٨٠} - \text{٢} = -\left(\text{٣هـ}'(\text{١})\right) \leftarrow \frac{\text{٧٨}}{-\text{٣}} = \frac{-\text{٣}}{-\text{٣}}\text{هـ}'(\text{١}) \leftarrow \text{هـ}'(\text{١}) = \boxed{-\text{٢٦}}$$

مثال (١٦)

إذا كان الاقتران $ق(س) = س^{٣} \times ٢هـ(س) + ٨\sqrt{س}$ ، جد $ق'(١)$، إذا علمت أن : $هـ(١) = -١$ ، $هـ'(١) = ٢$

الحـــل

$$ق'(س) = س^{٣} \times ٢هـ'(س) + ٢هـ(س) \times ٣س^{٢} + \frac{١}{٢} \times ٨س^{-\frac{١}{٢}}$$

$$ق'(١) = ١^{٣} \times ٢هـ'(١) + ٢هـ(١) \times ٣ \times ١^{٢} + ٤ \times ١^{-\frac{١}{٢}}$$

$$ق'(١) = (١ \times ٢ \times ٢) + (٢ \times -١ \times ٣ \times ١) + (٤ \times ١) = ٤ + -٦ + ٤ = \boxed{٢}$$

مثال (١٧)

إذا كان : $ق(س) = ٣\sqrt[٣]{س^{٢}} + \frac{س+١}{٢هـ(س)}$ ، جد $ق'(٨)$ ، إذا علمت أن : $هـ(٨) = \frac{١}{٢}$ ، $هـ'(٨) = -٢$

الحـــل

$$ق(س) = ٣س^{\frac{٢}{٣}} + \frac{س-١}{٢هـ(س)}$$

$$ق'(س) = \cancel{٣} \times \frac{٢}{\cancel{٣}} س^{\frac{٢}{٣}-١} + \frac{\left(٢هـ(س) \times ١\right) - \left((س+١) \times ٢هـ'(س)\right)}{\left(٢هـ(س)\right)^{٢}}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$$ق'(٨) = ٢ \times (٨)^{-\frac{١}{٣}} + \frac{\left(٢هـ(٨) \times ١\right) - \left((٨+١) \times ٢هـ'(٨)\right)}{\left(٢هـ(٨)\right)^{٢}}$$

$$ق'(٨) = ٢ \times \frac{١}{(٨)^{\frac{١}{٣}}} + \frac{\left(٢ \times \frac{١}{٢} \times ١\right) - (٩ \times ٢ \times -٢)}{\left(٢ \times \frac{١}{٢}\right)^{٢}}$$

$$ق'(٨) = ٢ \times \frac{١}{\sqrt[٣]{٨}} + \frac{(١) - (-٣٦)}{(١)^{٢}}$$

$$ق'(٨) = \cancel{٢} \times \frac{١}{\cancel{٢}} + \frac{٣٧}{١} = ١ + ٣٧ = \boxed{٣٨}$$

قواعد الاشتقاق (١-٢)

حلول الكتاب الوزاري صفحة ١٩

١)

أ) $(\text{ق}+٢\text{هـ})'(٥) = \text{ق}'(٥) + ٢\times\text{هـ}'(٥) = ٢+(٢\times -١) = ٢+-٢ = \boxed{٠}$

ب) $(٣\text{ق}-٤\text{هـ})'(٥) = ٣\text{ق}'(٥) - ٤\times\text{هـ}'(٥) = (٣\times٢)-(٤\times -١) = ٦+٤ = \boxed{١٠}$

جـ) $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(٥) = \frac{\left[\text{ق}'(٥)\times\text{هـ}(٥)\right]-\left[\text{ق}(٥)\times\text{هـ}'(٥)\right]}{(\text{هـ}(٥))^{٢}} = \frac{(٢\times٣)-(٩\times -١)}{(٣)^{٢}} = \frac{٦+٩}{٩} = \frac{١٥}{٩} = \boxed{\frac{٥}{٣}}$

د) $(\text{ق}\times\text{هـ})'(٥) = \text{ق}'(٥)\times\text{هـ}(٥) + \text{ق}(٥)\times\text{هـ}'(٥)$

$= (٢\times٣) + (٩\times -١) = ٦ + -٩ = \boxed{-٣}$

٢)

أ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}+٧ \leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٢-٣\text{س} \leftarrow \text{هـ}'(\text{س}) = -٣$

$(\text{ق}+\text{هـ})'(١) = \text{ق}'(١)+\text{هـ}'(١) = (٢\times١)-٣ = ٢-٣ = \boxed{-١}$

ب) $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(\text{س}) = \frac{\left[\text{هـ}(\text{س})\times\text{ق}'(\text{س})\right]-\left[\text{ق}(\text{س})\times\text{هـ}'(\text{س})\right]}{(\text{هـ}(\text{س}))^{٢}}$

$= \frac{\left[(٢-٣\text{س})\times٢\text{س}\right]-\left[(\text{س}^{٢}+٧)\times -٣\right]}{(٢-٣\text{س})^{٢}} = \frac{٤\text{س}-٦\text{س}^{٢}+٣\text{س}^{٢}+٢١}{(٢-٣\text{س})^{٢}} = \frac{-٣\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٢١}{(٢-٣\text{س})^{٢}}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

جـ) $\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{هـ}'(\text{س})} = \frac{٢\text{س}}{-٣} = \boxed{-\frac{٢}{٣}\text{س}}$

د) $(\text{ق}\times\text{هـ})'(٢) = \left(\text{ق}'(٢)\times\text{هـ}(٢)\right)+\left(\text{ق}(٢)\times\text{هـ}'(٢)\right)$

$= (٤\times -٤)+(١١\times -٣) = -١٦-٣٣ = \boxed{-٤٩}$

هـ) $\text{ق}'(٢)\times\text{هـ}(٢) = ٤\times -٤ = \boxed{-١٦}$

و) $\left(\text{س}^{٢}\times\text{ق}(\text{س})\right)'(\text{س}) = ٢\text{س}\times\text{ق}(\text{س}) + \text{س}^{٢}\times\text{ق}'(\text{س})$

$\left(\text{س}^{٢}\times\text{ق}(\text{س})\right)'(-٢) = ٢\times -٢\times\text{ق}(-٢) + (-٢)^{٢}\times\text{ق}'(-٢)$

$= (٢\times -٢\times١١)+(٤\times -٤) = -٤٤ + -١٦ = \boxed{-٦٠}$


٣)

$$(\text{ق}\times\text{هـ})'(٧) = \text{ق}'(٧)\times\text{هـ}(٧) + \text{ق}(٧)\times\text{هـ}'(٧)$$

$$١٢ = ٦\times\text{هـ}(٧) + (٣\times٣)$$

$$١٢ = ٦\text{هـ}(٧) + ٩$$

$$٦\text{هـ}(٧) = ١٢ - ٩ \leftarrow \frac{٦}{٦}\text{هـ}(٧) = \frac{٣}{٦} \leftarrow \text{هـ}(٧) = \boxed{\frac{١}{٢}}$$

٤)

$$\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(٩) = \frac{\big(\text{هـ}(٩)\times\text{ق}'(٩)\big) - \big(\text{ق}(٩)\times\text{هـ}'(٩)\big)}{\big(\text{هـ}(٩)\big)^{٢}}$$

$$٣ = \frac{(-٣\times-١٢) - \big(٥\times\text{هـ}'(٩)\big)}{(-٣)^{٢}}$$

$$٣ = \frac{٣٦ - ٥\text{هـ}'(٩)}{٩}$$ (بالضرب التبادلي)

$$٣٦ - ٥\text{هـ}'(٩) = ٢٧ \leftarrow -٥\text{هـ}'(٩) = ٢٧ - ٣٦ \leftarrow -٥\text{هـ}'(٩) = -٩ \leftarrow \text{هـ}'(٩) = \boxed{\frac{٩}{٥}}$$

٥)

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{أ}\text{س} + ٦ \leftarrow ٢\text{أ}\times٣ + ٦ = ٠ \leftarrow ٦\text{أ} = -٦ \leftarrow \text{أ} = \boxed{-١}$$

٦)

$$(\text{ق}\times\text{هـ})'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})\times\text{هـ}'(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\times\text{ق}'(\text{س})$$

$$(\text{ق}\times\text{هـ})'(\text{س}) = \Big((\text{س}^{٢} - ٢\text{أ}\text{س} + ٣)\times(٢\text{س})\Big) + \Big((\text{س}^{٢} - ٢)\times(٢\text{س} - ٢\text{أ})\Big)$$

إعداد المعلم سائد الحلاق

$$(\text{ق}\times\text{هـ})'(١) = \Big(\big(١^{٢} - (٢\text{أ}\times١) + ٣\big)\times(٢\times١)\Big) + \Big((١^{٢} - ٢)\times(٢\times١ - ٢\text{أ})\Big)$$

$$٨ = \Big((٤ - ٢\text{أ})\times٢\Big) + \Big(-١\times(٢ - ٢\text{أ})\Big)$$

$$٨ = ٨ - ٤\text{أ} - ٢ + ٢\text{أ} \leftarrow ٨ = ٦ - ٢\text{أ} \leftarrow ٨ - ٦ = -٢\text{أ} \leftarrow \frac{٢}{-٢} = \frac{-٢}{-٢}\text{أ} \leftarrow \text{أ} = \boxed{-١}$$

٧)

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\big((٦ - ٤\text{س})\times\text{أ}\big) - \big((\text{أ}\text{س} - ٥)\times-٤\big)}{(٦ - ٤\text{س})^{٢}}$$

$$\text{ق}'(١) = \frac{\big((٦ - ٤\times١)\times\text{أ}\big) - \big((\text{أ}\times١ - ٥)\times-٤\big)}{(٦ - ٤\times١)^{٢}} = -\frac{١}{٢}$$

$$\leftarrow \frac{٢\text{أ} + ٤\text{أ} - ٢٠}{٤} = -\frac{١}{٢}$$

$$١٢\text{أ} - ٤٠ = -٤ \leftarrow \frac{١٢}{١٢}\text{أ} = \frac{٣٦}{١٢} \leftarrow \text{أ} = \boxed{٣}$$

ورقة عمل ١ – ٣ قواعد الاشتقاق

أولاً إختر الإجابة الصحيحة

١) إذا كان الاقتران ق(س) = $\frac{٣}{س}$ ، فما قيمة ق′(١) ؟

أ) $-\frac{١}{٣}$ ب) ٣ ج) ١ د) −٣

٢) إذا كان الاقتران ق(س) = ٢س^{٣} ، هـ(س) = ٢س$^{-٢}$ ، فما قيمة (ق − هـ)′(١) ؟

أ) ١٠ ب) ٨ ج) ٢ د) −١٠

٣) إذا كان ك(س) = ٢ق(س) × هـ(س)، جد ك′(٢) علماً بأن: ق(٢) = −١ ، ق′(٢) = ٤ ، هـ(٢) = −٢ ، هـ′(٢) = −٣

أ) −٢٢ ب) ٢٢ ج) ١٠ د) −١٠

٤) إذا كان ك(س) = ق(س) ÷ هـ(س)، جد ك′(١) علماً بأن: ق(١) = ١ ، ق′(١) = ٢ ، هـ(١) = −٢ ، هـ′(١) = −١

أ) $-\frac{٣}{٤}$ ب) $\frac{٣}{٤}$ ج) $-\frac{٣}{٢}$ د) $-\frac{٥}{٤}$

٥) إذا كان ق(س) = (س^{٢} + ١)(٣س − ٢) ، فما قيمة ق′(٢) ؟

أ) ٣٣ ب) ٣١ ج) ٢٢ د) −٢٢

٦) إذا كان ق(س) = ٣س − أس^{٢} ، وكان ق′(٥) = ٢٣ ، فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٢ ب) −٢ ج) $-\frac{١٣}{٥}$ د) $-\frac{٢٦}{١٠}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٧) إذا كان ق(س) = $\frac{-٢ب}{س-١}$ ، وكان ق′(٢) = ٦ ، فما قيمة الثابت ب ؟

أ) ٣ ب) −٢ ج) ٣ د) ٢

٨) إذا كان الاقتران ق(س) = هـ(س) × س ، وكان ق′(٢) = −١، ق(٢) = ٦ فما قيمة هـ′(٢)؟

أ) −١ ب) ١ ج) −٢ د) ٢

٩) إذا كان ق(س) = $\frac{-٢س}{هـ(س)}$ ، وكان هـ(٢) = ٢ ، هـ′(٢) = −١ ، فما قيمة ق′(٢)؟

أ) ٢ ب) −٢ ج) −٤ د) ٤

(١٠) فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان هـ(س) = ٣ق(س) ، وكان هـَ(٢) = ٦ ، فما قيمة قَ(٢) ؟

أ ١٨ | ب ٢ | جـ −٢ | د ١٢

(١١) فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان ق(س) = (٣س + ١)(س − ٢) ، فما قيمة قَ(١) ؟

أ −٤ | ب ٧ | جـ ٣ | د ١

(١٢) فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س} + ١}{٣\text{س} - ٧}$ ، س ≠ $\frac{٧}{٣}$ ، فما قيمة قَ(١) ؟

أ $-\frac{٥}{٨}$ | ب $-\frac{١}{٤}$ | جـ $\frac{١}{٣}$ | د $-\frac{١}{٢}$

(١٣) فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كان (ق × هـ)َ(٤) = ١٢ ، وكان قَ(٤) = ٦ ، ق(٤) = ٣ ، هـ(٤) = ٣ ، فما قيمة هـَ(٤) ؟

أ −١٠ | ب ١٠ | جـ ٢ | د −٢

(١٤) فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

إذا كان ق(س) = س^{٢} × ل(س) ، وكان لَ(٣) = ٢ ، ل(٣) = $-\frac{١}{٦}$ ، فما قيمة قَ(٣) ؟

أ −١ | ب ١٢ | جـ ١٩ | د ١٧

إعداد المعلم : سائد الحلاق

(١٥) فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

إذا كان ق(س) = س + ١ ، هـ(س) = س^{٢} ، فما قيمة (ق × هـ)َ(−٢) ؟

أ ١٦ | ب ١٢ | جـ ٨ | د −٨

(١٦) فلسطين : ٢٠١٩

إذا كان ق(٧) = −٥ ، هـ(٧) = ٢ ، قَ(٧) = ٣ ، هـَ(٧) = −١ ، فما قيمة (٢ق × ٣هـ)َ(٧) ؟

أ ٦٦ | ب ٦ | جـ −٦ | د −١٨

(١٧) رام الله : ٢٠٢٠ تجريبي

بالاعتماد على البيانات الموجودة داخل الجدول المجاور فإن

ق(٢)	قَ(٢)	هـ(٢)	هـَ(٢)
−١	٣	٠	−٤

(س ق − ٣هـ)َ(٢) =

أ ١٥ | ب ١٧ | جـ ١٦ | د ١٨

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال	الجواب النهائي
١	إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}^{٢}} + ٤\sqrt{\text{س}}$ ، فما قيمة $\text{ق}'(١)$ ؟	-٢
٢	إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢\sqrt{\text{س}} + [\text{هـ}(\text{س}) \times \text{س}^{٢}]$ ، فما قيمة $\text{ق}'(١)$ علماً بأن : $\text{هـ}(١) = ٢$ ، $\text{هـ}'(١) = -٣$	٢
٣	إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}+١)(\text{ب س}-١)$ ، ما قيمة الثابت ب علماً بأن $\text{ق}'(١) = ٥$	$\text{ب} = ٢$
٤	إذا كان $\text{س}^{٢} = \text{هـ}(\text{س}) \times ٢\text{ق}(\text{س})$، وكان $\text{ق}(٢) = ١$ ، $\text{ق}'(٢) = -١$ احسب قيمة $\text{هـ}'(٢)$	٤
٥	إذا كان $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{١}{٣+\text{ب س}} - \frac{١}{٣\text{ب}}$ ، $\text{هـ}'(١) = ٢$ ، احسب قيمة / قيم الثابت ب.	$-\frac{٩}{٢}$ ، -٢
٦	إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{س}^{٢}-٢}$ ، أجد قيمة $\text{ق}'(٣)$ علماً بأن : $\text{هـ}'(٣) = -١$ ، $٢\text{هـ}(٣) = ٤$	$-\frac{١}{٢}$
٧	إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٤\sqrt{\text{س}} + \frac{\text{س}-١}{\text{هـ}(\text{س})}$ ، احسب قيمة $\text{ق}'(٤)$ علماً بأن : $\text{هـ}(٤) = ١$ ، $\text{هـ}'(٤) = -٢$	٨
٨	إذا كان $(\text{ق} \times ٤\text{هـ})'(٣) = ٢٤$ ، وكان : $\text{ق}'(٣) = ٢$ ، $\text{هـ}(٣) = -٢$ ، $\text{هـ}'(٣) = ٥$ ، جد $\text{ق}(٣)$	٢
٩	إذا كان: $\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{هـ}(\text{س}) \times \text{س}^{٢} - \text{س}$ ، وكان : $\frac{١}{٢}\text{هـ}'(٢) = -٢$ ، $٣\text{هـ}(٢) = ٦$ جد $\text{ق}'(٢)$	-٢٥
١٠	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} \times \text{هـ}(\text{س})$، جد $\text{ق}'(٢)$ علماً بأن : $\text{ق}(٢) = ٨$ ، $\text{هـ}'(٢) = -١$	٤
١١	غرب غزة : ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س}) \times (\text{س}^{٢} - ٢)$، أجد قيمة $\text{ق}'(١)$ علماً بأن : $\text{هـ}(١) = ٣$ ، $\text{هـ}'(١) = -٢$	٨

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١٢	قباطية : ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان $ق(س) = \frac{أس - ٥}{٦ - ٤س}$ ، وكان $ق'(١) = -\frac{١}{٢}$ ، فما قيمة الثابت أ؟	$أ = ٣$
١٣	بيت لحم ورام الله : ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان $ق(س) = س^٢ - ٢أس + ٣$ ، $هـ(س) = س^٢ - ٢$ ، وكان $(ق \times هـ)'(١) = ٨$ فما قيمة الثابت أ؟	$أ = -١$
١٤	أريحا : ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان: $ق(س) = (س + ١)(٢س + ٣) + أس^٢$ ، وكان: $ق'(٢) = -٧$ ، فما قيمة الثابت أ ؟	$أ = -٥$
١٥	الوسطى : ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان $ق(س) = \frac{أس + ٤}{٣س^٢ + ٢}$ ، وكان $ق'(١) = ١$ ، فما قيمة الثابت أ؟	$أ = -٤٩$
١٦	شرق خانيونس: ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان: $ق(س) = ٣س - (٢س - ٩س^٢) \times هـ(س)$ ، وكان : $ق(١) = ١٧$ ، $ق'(١) = -٣$ ، فما قيمة $هـ'(١)$؟	$-\frac{٢٦٦}{٤٩} = -\frac{٣٨}{٧}$
١٧	رفح: ٢٠١٩ تجريبي إذا كان: $ق(س) = (٢س^٢ + ١) \times ٢هـ(س) + ٤س$ ، وكان : $هـ(٢) = ٣$ ، $هـ'(٢) = ٢$ ، فجد $ق'(٢)$	٨٨
١٨	قباطية : ٢٠١٩ تجريبي إذا كان: $\frac{ق(س)}{هـ(س)} = ٢س$ ، $هـ(س) \neq ٠$ ، أوجد $ق'(٢)$ علماً بأن : $هـ'(٢) = ٢$ ، $هـ(٢) = ٣$	١٤

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١٩	فلسطين : ٢٠١٨ إذا كان: $ق(س) = (أ + س)^{٢}$ ، وكان: $ق'(٢) = ق(١)$ ، فما قيمة / قيم أ؟	$أ = \pm\sqrt{٣}$
٢٠	فلسطين : ٢٠١٦ إذا كان: $ق(س) = س^{٣} ل(س) + هـ(س)$ ، وكان : $ل(٢) = ٥$ ، $هـ'(٢) = ٧$ ، $ل'(٢) = -٣$ ، فما قيمة $ق'(٢)$ ؟	٤٣
٢١	فلسطين : ٢٠١٥ إذا كان الاقتران: $ق(س) = أس^{٣} + ٢س + ب$ ، وكان : $ق'(١) = ٥$ ، ويمر منحنى الاقتران $ق(س)$ بالنقطة $(٢، -٣)$ ، فما قيم الثابتين أ، ب	$ب = -١٥$ $أ = ١$
٢٢	فلسطين : ٢٠١٢ إذا كان: $ق(س) = ٦س + \frac{س^{٢}}{هـ(س)}$ ، جد $ق'(١)$ علماً بأن : $هـ'(١) = -١$ ، $هـ(١) = ٢$	$\frac{٢٩}{٤}$
٢٣	فلسطين : ٢٠١٠ جد المشتقة الاقتران $ق(س) = \frac{٢س - ١}{س^{٢} + ٤}$ ، $س = ٠$	$\frac{١}{٢}$
٢٤	فلسطين : ٢٠٠٩إكمال جد المشتقة الأولى للاقتران $ق(س) = (س + ١) \times (س + ٢)$ ، عندما $س = ١$	٥
٢٥	فلسطين : ٢٠٠٨ إذا كان: $ق(س) = ٢\sqrt{س} - س^{٢} \times هـ(س)$ ، فجد $ق'(١)$ علماً بأن : $هـ'(١) = -٣$ ، $هـ(١) = ٢$	صفر
٢٦	فلسطين : ٢٠٠٧إكمال إذا كان: $ق(٢) = ٣$ ، $ق'(٢) = ٤$ ، $هـ(س) = س^{٢} + ٢$ ، فجد $(ق \times هـ)'(٢)$	٣٦

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١ – ٤ القيم القصوى للإقتران

ملخص الدرس

ستستخدم المشتقة الأولى للاقتران لتحديد فترات التزايد والتناقص وإيجاد القيم القصوى المحلية:

أولاً: فترات التزايد والتناقص

تعريف

يكون الاقتران ق(س) متزايداً على الفترة [أ ، ب] ، إذا كان : لكل س$_2$ > س$_1$ فإن:
ق(س$_2$) > ق(س$_1$) لأي عددين س$_1$ ، س$_2$ ∈ [أ ، ب]

ويكون الاقتران ق(س) متناقصاً على الفترة [أ ، ب] ، إذا كان : لكل س$_2$ > س$_1$ فإن:
ق(س$_2$) < ق(س$_1$) لأي عددين س$_1$ ، س$_2$ ∈ [أ ، ب]

قـــاعدة

إذا كان ق(س) معرفاً على الفترة [أ ، ب] ، فإن ق(س) يكون :

١ متزايداً في الفترة [أ ، ب] ، إذا كانت ق$'$(س) > ٠ لكل س في الفترة] أ ، ب [.

٢ متناقصاً في الفترة [أ ، ب] ، إذا كانت ق$'$(س) < ٠ لكل س في الفترة] أ ، ب [.

٣ ثابتاً في الفترة [أ ، ب] ، إذا كانت ق$'$(س) = ٠ لكل س في الفترة] أ ، ب [.

خطوات بحث فترات التزايد والتناقص

إذا كان الاقتران ق(س) اقتراناً ، نتبع الخطوات الآتية لإيجاد فترات التزايد والتناقص:

١ إيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق(س) المعطى لنحصل على ق$'$(س) .

٢ نجد قيمة أو قيم س التي عندها المشتقة الأولى تساوي صفر .

٣ نرسم خط الأعداد ونعين النقطة أو النقاط على خط الأعداد ونقسم المجال إلى فترات.

٤ نبحث إشارة ق$'$(س) حول قيمة أو قيم س السابقة في كل فترة ، ثم نُعين الإشارة ، ويصنف كما يلي:

- يكون الاقتران ق(س) متزايد على مجالهُ إذا كانت إشارة ق$'$(س) موجبة ، ق$'$(س) > ٠ ⟵ (+ + + +)
- ويكون الاقتران ق(س) متناقص على مجالهُ إذا كانت إشارة ق$'$(س) سالبة ، ق$'$(س) < ٠ ⟵ (– – – –)
- أما إذا كان ق$'$(س) = ٠ ، فإن الاقتران ق(س) يكون اقتران ثابت على مجالهُ.

أمثلة محلولة

مثال ١

أحدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = ٢س^{٢} + ٨س + ٦ ، س ∈ ح

الحـــل

١) نشتق الاقتران ق(س) = ٢س^{٢} + ٨س + ٦ ← ق′(س) = ٤س + ٨

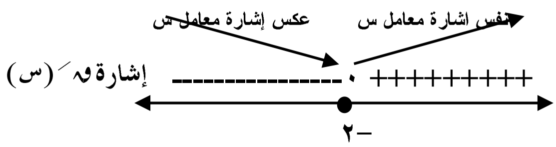
٢) نساوي المشتقة الأولى بالصفر ← ٤س + ٨ = ٠

٣) نحل المعادلة الناتجة : ٤س + ٨ = ٠ ← $\frac{٤}{٤}$س = $\frac{-٨}{٤}$ ← $\boxed{\text{س} = -٢}$

٤) نضع −٢ على خط الأعداد ثم نبحث إشارة ق′(س) في جوار س = −٢

الاقتران ق(س) متزايد على الفترة]−٢ ، ∞[

الاقتران ق(س) متناقص على الفترة]−∞ ، −٢[



مثال ٢

أحدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − ١ ، س ∈ ح

الحـــل

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١) نشتق الاقتران ق(س) = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − ١ ← ق′(س) = ٦س^{٢} − ٦س

٢) نساوي المشتقة الأولى بالصفر ← ٦س^{٢} − ٦س = ٠

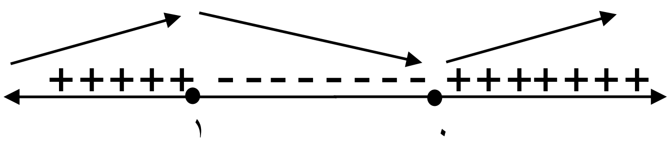
٣) نحل المعادلة الناتجة : ٦س^{٢} − ٦س = ٠ ← ٦س(س − ١) = ٠

إما : ٦س = ٠ ← $\boxed{\text{س} = ٠}$ أو س − ١ = ٠ ← $\boxed{\text{س} = ١}$

٤) نضع ٠ ، ١ على خط الأعداد ثم نبحث إشارة ق′(س)

الاقتران ق(س) متناقص على الفترة [٠ ، ١]

الاقتران ق(س) متزايد على الفترة [٠ ، ∞[∪]−∞ ، ١]



مثال ٣

أحدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = –س ³ + ٣س + ٢ ، س ∈ ح

الحل

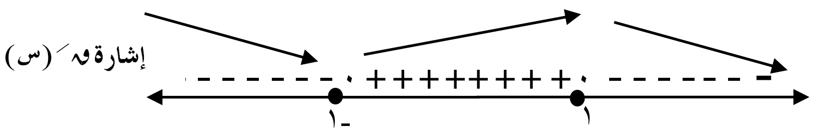
١) نشتق الاقتران ق(س) = –س ³ + ٣س + ٢ ← ق′(س) = –٣س ² + ٣

٢) نساوي المشتقة الأولى بالصفر ← –٣س ² + ٣ = ٠

٣) نحل المعادلة الناتجة : – ٣س ² + ٣ = ٠ ← $\frac{-٣}{-٣}$س ² = $\frac{-٣}{-٣}$ ← س ² = ١ (نأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

إما : $\boxed{س = ١}$ أو $\boxed{س = -١}$

٤) نضع ١ ، –١ على خط الأعداد ثم نبحث إشارة ق′(س)



الاقتران ق(س) متزايد على الفترة [–١ ، ١]

الاقتران ق(س) متناقص على الفترة [١ ، ∞ [∪] –∞ ، –١]

مثال ٤

أحدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = ٢س ³ – ٣س ² – ١٢س + ١٠ ، س ∈ ح

الحل

إعداد المعلم : سائد الحلاق

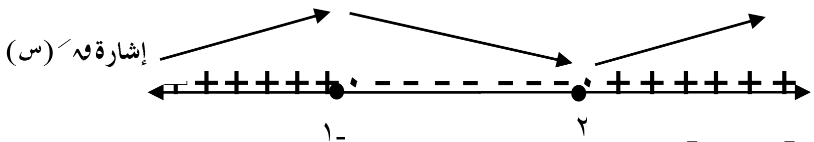
١) نشتق الاقتران ق(س) = ٢س ³ – ٣س ² – ١٢س + ١٠ ← ق′(س) = ٦س ² – ٦س – ١٢

٢) نساوي المشتقة الأولى بالصفر ← ٦س ² – ٦س – ١٢ = ٠ (نقسم طرفي المعادلة على العدد ٦)

٣) نحل المعادلة الناتجة : س ² – س – ٢ = ٠ ← (س – ٢)(س + ١) = ٠ (نحلل المقدر الثلاثي)

إما : (س – ٢) = ٠ ← $\boxed{س = ٢}$ أو (س + ١) = ٠ ← $\boxed{س = -١}$

٤) نضع ٢، –١ على خط الأعداد ثم نبحث إشارة ق′(س)



الاقتران ق(س) متناقص على الفترة [–١ ، ٢]

الاقتران ق(س) متزايد على الفترة] –∞ ، –١] ∪ [٢ ، ∞ [

ثانياً: القيم القصوى للإقتران

أتعلم

يكون للاقتران ق(س) المعرف على ح قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند س = أ ، إذا كان:

١ ق َ(أ) = ٠

٢ يغير ق(س) من سلوكه حول س = أ من التزايد إلى التناقص أو العكس.

خطوات إيجاد القيم القصوى للاقتران

لإيجاد القيم القصوى للاقتران ق(س) ، نتبع الخطوات التالية :

١ إيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق(س) المعطى لنحصل على ق َ(س) .

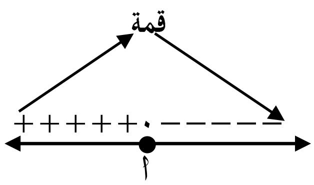
٢ نجد قيمة أو قيم س التي عندها المشتقة الأولى تساوي صفر .

٣ نرسم خط الأعداد ونعين النقطة أو النقاط على خط الأعداد ونقسم المجال إلى فترات.

٤ نبحث إشارة ق َ(س) في كل فترة ، ثم نُعين الإشارة ونحدد نوع القيم القصوى (عظمى ، صغرى).

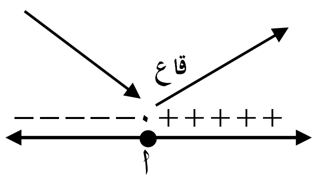
٥ نعوض بالاقتران الأصلي بقيمة أو قيم س ونجد القيم القصوى قيم ص (عظمى ، صغرى).

قيمة عظمى محلية



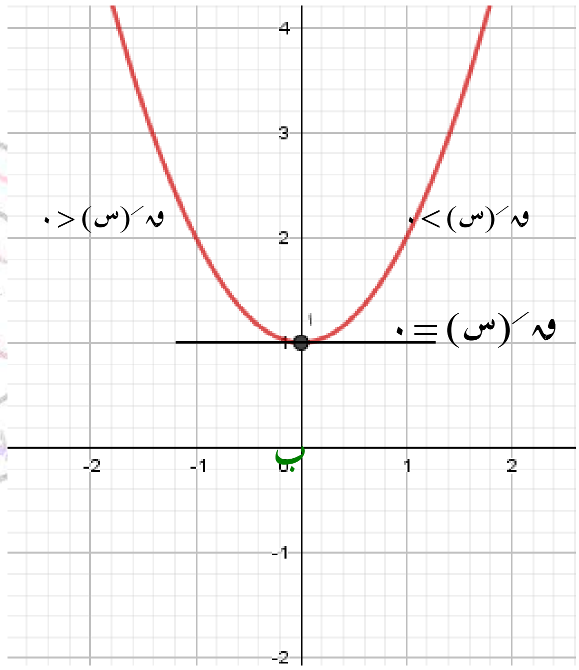
إذا كان ق َ(س) > ٠ على اليسار ، ق َ(س) < ٠ على اليمين ، يوجد قيمة عظمى محلية

قيمة صغرى محلية



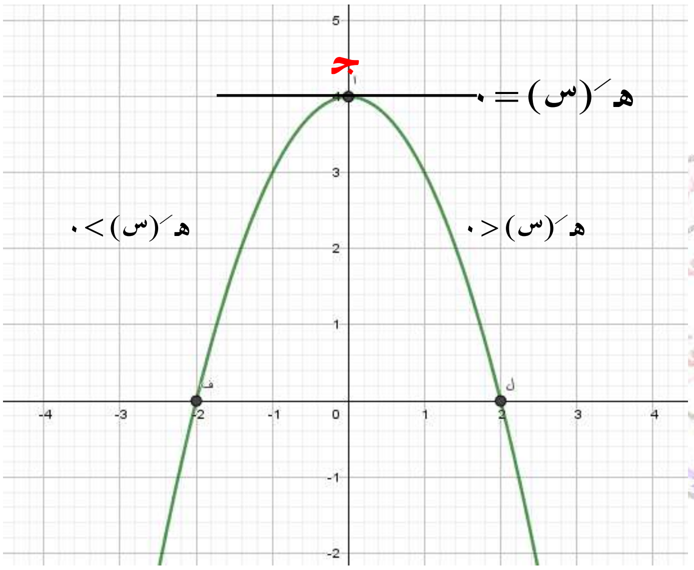
إذا كان ق َ(س) < ٠ على اليسار ، ق َ(س) > ٠ على اليمين ، يوجد قيمة صغرى محلية.

● تأمل الشكلين المرسومين التاليين ، لتلاحظ العلاقة بين إشارة المشتقة والقيم القصوى للاقتران:



ق(ب) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

لأن : إشارة ق´(س) تغيرت من سالبة إلى موجبة.

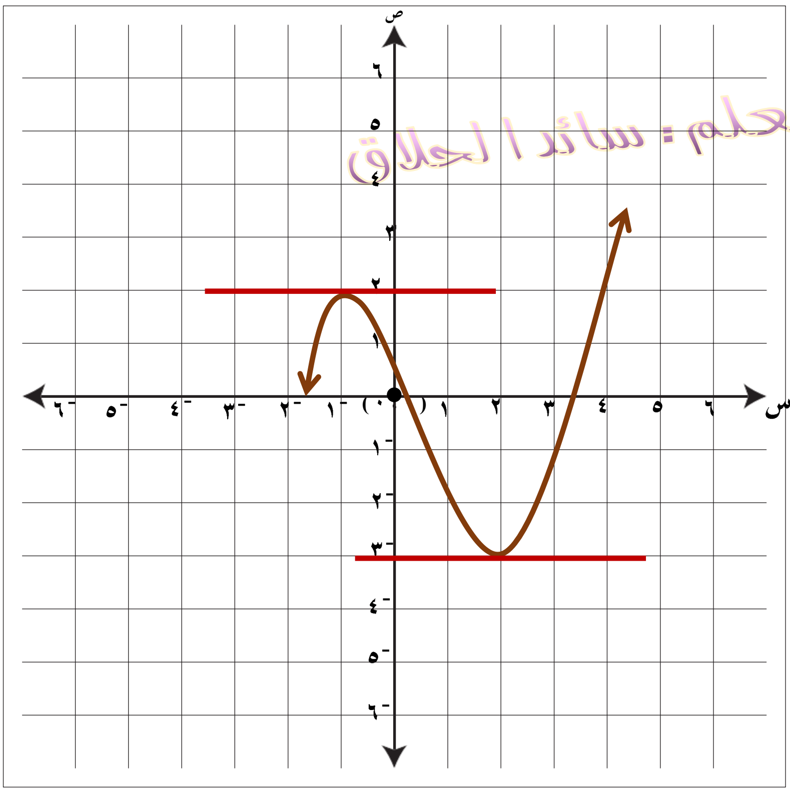


الشكل (٢)

ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران هـ(س)

لأن : إشارة هـ´(س) تغيرت من موجبة لسالبة.

تأمل الشكل المرسوم:



معلم : سائد الحلاق

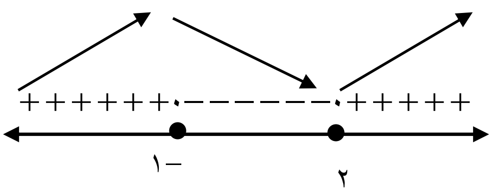
نلاحظ من التمثيل البياني أن :

عند س = −١ يوجد قيمة **عظمى** محلية وهي:

ق(−١) = ٢

عند س = ٢ يوجد قيمة صغرى محلية وهي:

ق(٢) = −٣



مثال ١

أجد القيم القصوى للاقتران ق(س) = ٣س^٢ − ١٢س − ١ ، س ∈ ح ، إن وجدت ، وأحدد نوعها.

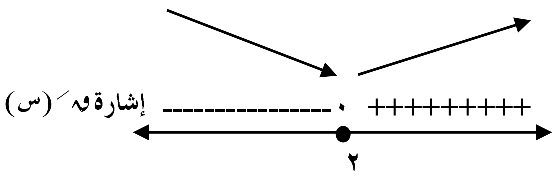
الحـــل

١) نشتق الاقتران ق(س) = ٣س^٢ − ١٢س − ١ ← ق′(س) = ٦س − ١٢

٢) نساوي المشتقة الأولى بالصفر ← ٦س − ١٢ = ٠

٣) نحل المعادلة الناتجة : ٦س − ١٢ = ٠ ← ٦/٦ س = ١٢/٦ ← $\boxed{\text{س} = ٢}$

٤) نضع ٢ على خط الأعداد ثم نبحث إشارة ق′(س) حول س = ٢



من إشارة ق′(س) يتضح تغير سلوك الاقتران من التناقص للتزايد

وجود قيمة صغرى محلية عند س = ٢

٥) نعوض بالاقتران الأصلي لإيجاد قيمتها :

ق(٢) = ٣ × (٢)^٢ − ١٢ × ٢ − ١ = (٣ × ٤) − ٢٤ − ١ = −١٢ − ١ = $\boxed{-١٣}$

مثال ٢

عين القيم القصوى للاقتران ق(س) = −س^٢ − ٦س + ١ ، س ∈ ح ، إن وجدت ، وأحدد نوعها.

الحـــل

إعداد المعلم: سائد الحلاق

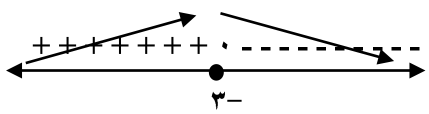
١) نشتق الاقتران ق(س) = −س^٢ − ٦س + ١ ← ق′(س) = −٢س − ٦

٢) نساوي المشتقة الأولى بالصفر ← −٢س − ٦ = ٠

٣) نحل المعادلة الناتجة : −٢س − ٦ = ٠ ← −٢س = ٦ ← −٢/−٢ س = ٦/−٢ ← $\boxed{\text{س} = -٣}$

٤) نضع −٣ على خط الأعداد ثم نبحث إشارة ق′(س) حول س = −٣

من إشارة ق′(س) يتضح تغير سلوك الاقتران من التزايد للتناقص



وجود قيمة عظمى محلية عند س = −٣

٥) نعوض بالاقتران الأصلي لإيجاد قيمتها: ق(−٣) = −(−٣)^٢ + (−٦ × −٣) + ١ = −٩ + ١٨ + ١ = $\boxed{١٠}$

مثال ٣

عين القيم القصوى للاقتران $ق(س) = -س^{٣} + ٢٧س$ ، س ∈ ح ، إن وجدت ، وحدد نوعها.

الحل

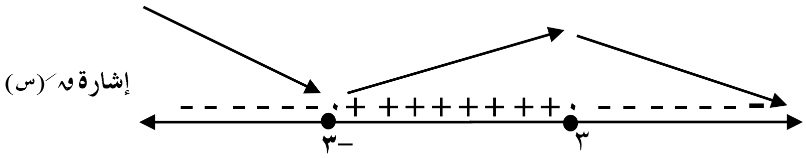
١) نشتق الاقتران $ق(س) = -س^{٣} + ٢٧س \leftarrow ق'(س) = -٣س^{٢} + ٢٧$

٢) نساوي المشتقة الأولى بالصفر $\leftarrow -٣س^{٢} + ٢٧ = ٠$

٣) نحل المعادلة الناتجة : $-٣س^{٢} + ٢٧ = ٠ \leftarrow -٣س^{٢} = -٢٧ \leftarrow \frac{-٣}{-٣}س^{٢} = \frac{-٢٧}{-٣} \leftarrow س^{٢} = ٩$

$\leftarrow \sqrt{س^{٢}} = \sqrt{٩} \leftarrow$ إما : $\boxed{س = ٣}$ أو $\boxed{س = -٣}$

٤) نضع ٣ ، −٣ على خط الأعداد ثم نبحث إشارة $ق'(س)$



من إشارة $ق'(س)$ يتضح وجود قيمة عظمى محلية عند س = ٣

وقيمتها : $ق(٣) = -(٣)^{٣} + (٢٧ \times ٣) = -٢٧ + ٨١ = \boxed{٥٤}$

ووجود قيمة صغرى محلية عند س = −٣ وقيمتها :

$ق(-٣) = -(-٣)^{٣} + (٢٧ \times -٣) = +٢٧ - ٨١ = \boxed{-٥٤}$

إعداد المعلم/ سائد الحلاق

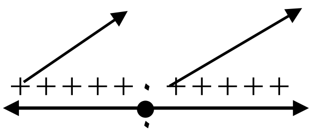
مثال ٤

أثبت أنهُ لا يوجد للاقتران $ق(س) = س^{٣} + ٢٧$ ، س ∈ ح . أي قيم قصوى محلية.

الحل

$ق'(س) = ٣س^{٢}$

$٣س^{٢} = ٠ \leftarrow \boxed{س = ٠}$



∵ ق (س) لم يغير من سلوكهُ حول س = ٠ واشارة المشتقة لم تتغير.

∴ لا يوجد قيم قصوى محلية في مجالهُ.

مثال ٥

إذا كان الاقتران $ق(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - \frac{٥}{٢}س^{٢} - ٦س + \frac{١٧}{٦}$ ، س ∈ ح ، جد:

١) القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)، وما نوعها؟

٢) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

الحـــل

$$ق(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - \frac{٥}{٢}س^{٢} - ٦س + \frac{١٧}{٦}$$

$$\leftarrow ق'(س) = \cancel{٣} \times \frac{١}{\cancel{٣}}س^{٢} - \cancel{٢} \times \frac{٥}{\cancel{٢}}س - ٦ \leftarrow س^{٢} - ٥س - ٦$$

نساوي المشتقة الأولى بالصفر ← $س^{٢} - ٥س - ٦ = ٠$

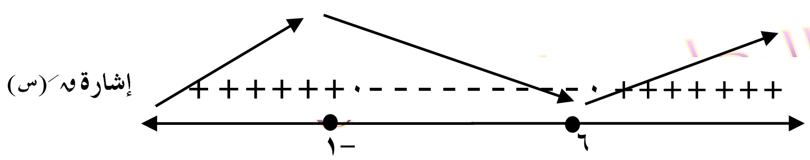
نحل المعادلة الناتجة : $س^{٢} - ٥س - ٦ = ٠$

$$(س - ٦)(س + ١) = ٠$$

إما : $س - ٦ = ٠ \leftarrow \boxed{س = ٦}$

أو $س + ١ = ٠ \leftarrow \boxed{س = -١}$

نضع ٦ ، -١ على خط الأعداد ثم نبحث إشارة ق'(س)



من إشارة ق'(س) يتضح وجود قيمة عظمى محلية عند س = -١ وقيمتها :

$$ق(-١) = \frac{١}{٣} \times (-١)^{٣} - \frac{٥}{٢} \times (-١)^{٢} - (٦ \times -١) + \frac{١٧}{٦} = \boxed{٦}$$

ووجود قيمة صغرى محلية عند س = ٦

وقيمتها : $ق(٦) = \frac{١}{٣}(٦)^{٣} - \frac{٥}{٢} \times (٦)^{٢} - ٦ \times ٦ + \frac{١٧}{٦} = \boxed{-٥١\frac{١}{٦}}$

الاقتران ق(س) متناقص على الفترة [-١ ، ٦]

الاقتران ق(س) متزايد على الفترة]-∞ ، -١] ∪ [٦ ، ∞[

ملاحظة

إذا تحول الاقتران من متزايد إلى متناقص فإنه يمر بقيمة عظمى ، و إذا تحول من متناقص إلى متزايد فإنه يمر بقيمة صغرى.

مثال ٦

إذا كان الاقتران ق(س) = ق(س) = −س^{٣} + ٦س^{٢} + ١ ، س ∈ ح ، جد:

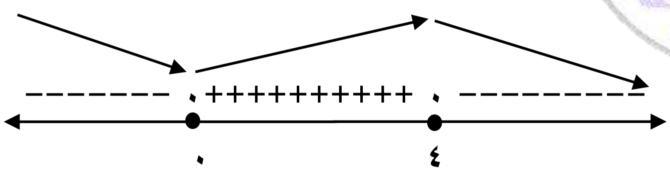
١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٢) القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)، وما نوعها؟

الحـــل

ق′(س) = −٣س^{٢} + ١٢س ← −٣س^{٢} + ١٢س = ٠ ← −٣س(س − ٤) = ٠

أما: س = $\boxed{٠}$ أو س − ٤ = ٠ ← س = $\boxed{٤}$



الاقتران ق(س) متناقص على الفترة :]−∞ ، ٠] ∪ [٤ ، ∞[

الاقتران ق(س) متزايد على الفترة : [٠ ، ٤] .

← يوجد قيمة عظمى محلية عند س = ٤

قيمتها : ق(٤) = −(٤)^{٣} + ٦ × (٤)^{٢} + ١ = −٦٤ + ٩٦ + ١ = $\boxed{٣٣}$

← يوجد قيمة صغرى محلية عند س = ٠ ، قيمتها ق(٠) = −(٠)^{٣} + ٦ × (٠)^{٢} + ١ = $\boxed{١}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ٧

إذا كان الاقتران ق(س) = ٢س^{٢} + ب س − ٧ ، س ∈ ح ، يأخذ قيمة صغرى محلية عند س = −١ ، فما قيمة الثابت ب؟

الحـــل

ق′(س) = ٤س + ب

∵ الاقتران ق(س) له قيمة صغرى عند س = −١ ∴ ق′(−١) = ٠

ق′(−١) = ٤ × −١ + ب = ٠

−٤ + ب = ٠ ← $\boxed{ب = ٤}$

مثال ٨

إذا كان الاقتران هـ(س) = $-$س^{٢} + $\frac{س}{جـ}$ - ٣، س ∈ ع ، جـ ≠ ٠ ، يأخذ قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{١}{٤}$ ، فما قيمة الثابت جـ ؟

الحـــل

هـ$'$(س) = $-$٢س + $\frac{١}{جـ}$

∵ الاقتران هـ(س) يأخذ قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{١}{٤}$ ← ∴ هـ$'$$\left(\frac{١}{٤}\right)$ = ٠

$-٢ \times \left(\frac{١}{٤}\right) + \frac{١}{جـ} = ٠$

$-\frac{١}{٢} + \frac{١}{جـ} = ٠$

$\frac{١}{جـ} = \frac{١}{٢}$ ← $\boxed{جـ = ٢}$

مثال ٩

ما قيمة الثابت أ الذي يجعل للاقتران ق(س) = $\frac{١}{٣}$س^{٣} + أس^{٢} + ١٦س ، س ∈ ع ، قيمة صغرى محلية عند س = ٨ ؟

الحـــل

إعداد المعلم : سائد الحلاق

ق$'$(س) = س^{٢} + ٢أس + ١٦

∵ ق(٨) يأخذ قيمة صغرى محلية. ← ق$'$(٨) = ٠

ق$'$(٨) = ٨^{٢} + ٢ × أ × ٨ + ١٦ = ٠

٦٤ + ١٦أ + ١٦ = ٠

٨٠ + ١٦أ = ٠

← ١٦أ = $-$٨٠

← $\frac{\cancel{١٦}}{\cancel{١٦}}$أ = $\frac{-٨٠}{١٦}$

← $\boxed{أ = -٥}$

مثال ١٠

ما قيمة الثابتين أ ، ب للاقتران ق(س) = س ^٣^ – ب س + أ ، س ∈ ح ، والتي يجعل للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند س = ١ ، علماً بأنهُ يمر بالنقطة (٢ ، ٣) .

الحـــل

∵ الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (٢ ، ٣)

∴ ق(٢) = ٢ ^٣^ – ب × ٢ + أ = ٣ ← $\boxed{\text{٨ – ٢ب + أ = ٣}}$ ← $\boxed{\text{١}}$

∵ الاقتران ق(س) يأخذ قيمة صغرى محلية عند س = ١ ← ∴ ق′(١) = ٠

ق′(س) = ٣س ^٢^ – ب

٠ = ٣(١) ^٢^ – ب

٠ = ٣ – ب ← $\boxed{\text{ب = ٣}}$

⇐ نعوض عن قيمة ب = ٣ في المعادلة رقم (١) لإيجاد قيمة أ:

٨ – (٢ × ٣) + أ = ٣

٨ – ٦ + أ = ٣

٢ + أ = ٣

أ = ٣ – ٢ ← $\boxed{\text{أ = ١}}$ ⇐ قيمة الثابتين: أ = $\boxed{\text{١}}$ ، ب = $\boxed{\text{٣}}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

مثال ١١

إذا كان للاقتران ق(س) = ٢س ^٣^ – أ س قيمة صغرى محلية عند س = ١ جد قيمة س التي يكون عندها قيمة عظمى للاقتران.

الحـــل

ق′(س) = ٦س ^٢^ – أ

٠ = ٦(١) ^٢^ – أ

٠ = ٦ – أ ← $\boxed{\text{أ = ٦}}$

لإيجاد قيمة س ، نعوض عن قيمة أ ، ثم نساوي المشتقة الأولى بالصفر : ق(س) = ٢س ^٣^ – ٦ س

⇐ ق′(س) = ٦س ^٢^ – ٦ ← ٠ = ٦س ^٢^ – ٦ ← ٦ = ٦س ^٢^ ← ١ = س ^٢^

⇐ س = ±١

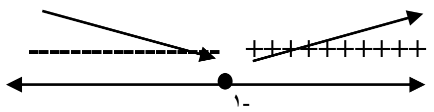
ومنها يوجد للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند $\boxed{\text{س = –١}}$


القيم القصوى (١-٤) حلول الكتاب الوزاري صفـــــحة ٢٤

١) يوجد للاقتران هـ$(س)$ قيمة عظمى محلية عند النقطة $(-٢ ، ٦)$ وقيمة صغرى محلية عند النقطة $(٠ ، ١)$

٢) $ق(س) = ٣س^{٢} + ٦س - ١ \leftarrow ق'(س) = ٦س + ٦ \leftarrow ٦س + ٦ = ٠$

$٦س + ٦ = ٠ \leftarrow \frac{٦}{٦}س = \frac{-٦}{٦} \leftarrow \boxed{س = -١}$



الاقتران $ق(س)$ متزايد على الفترة $[-١ ، \infty[$

الاقتران $ق(س)$ متناقص على الفترة $]-\infty ، -١]$

يوجد للاقتران $ق(س)$ قيمة صغرى محلية عند $س = -١$ ،

وقيمتها : $ق(-١) = ٣ \times (-١)^{٢} + (٦ \times -١) - ١ = ٣ - ٦ - ١ = \boxed{-٤}$

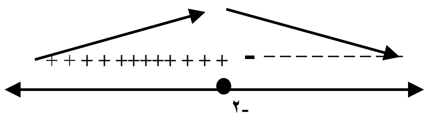
٣) ∵ الاقتران له قيمة عظمى محلية عندما $س = ٢$ ، ∴ $ق'(٢) = ٠ \leftarrow ق'(س) = -جـ - ٢س$

$ق'(٢) = ٠ \leftarrow -جـ - ٢ \times ٢ = ٠ \leftarrow -جـ - ٤ = ٠ \leftarrow جـ = \boxed{-٤}$

٤) $ق(س) = (س + ٢) \times (-٢س - ٤)$

$ق'(س) = (س + ٢)(-٢) + (-٢س - ٤)(١) = -٢س - ٤ - ٢س - ٤ = -٤س - ٨$

$ق'(س) = -٤س - ٨ \leftarrow ق'(س) = ٠ \Leftarrow -٤س - ٨ = ٠ \Leftarrow -٤س = ٨ \Leftarrow س = \frac{٨}{-٤} = \boxed{-٢}$

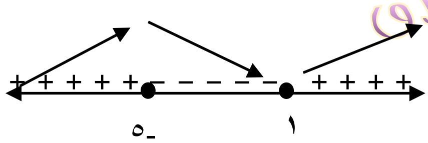


الاقتران متزايد على الفترة $]-\infty ، -٢]$ ، لأن المشتقة موجبة .

الاقتران متناقص على الفترة $[-٢ ، \infty[$ ، لأن المشتقة سالبة .

٥) $ل'(س) = س^{٢} + ٤س - ٥$

$س^{٢} + ٤س - ٥ = ٠ \leftarrow (س + ٥)(س - ١) = ٠ \leftarrow س = \boxed{-٥} ، س = \boxed{١}$



الاقتران متزايد على الفترة $]-\infty ، -٥] \cup [١ ، \infty[$

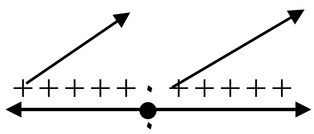
الاقتران متناقص على الفترة $[-٥ ، ١]$.

من إشارة $ق'(س)$ يتضح وجود قيمة عظمى محلية عند $س = -٥$ وقيمتها :

$ق(-٥) = \frac{١}{٣}(-٥)^{٣} + ٢(-٥)^{٢} - ٥(-٥) - ٥ = \boxed{٢٨\frac{١}{٣}}$

ووجود قيمة صغرى محلية عند $س = ١$ وقيمتها : $ق(١) = \frac{١}{٣}(١)^{٣} + ٢(١)^{٢} - ٥(١) - ٥ = \boxed{-٧\frac{٢}{٣}}$

٦) $ق'(س) = ٣س^{٢} \leftarrow ٣س^{٢} = ٠ \leftarrow \boxed{س = ٠}$



∵ $ق(س)$ لم يغير من سلوكهُ حول $س = ٠$ واشارة المشتقة لم تتغير.

∴ لا يوجد قيم قصوى محلية في مجالهُ.

إعداد المعلم : سائد الحلاق

ورقة عمل ٤ – ١ القيم القصوى للاقتران

أولاً إختر الإجابة الصحيحة

١) ما عدد القيم القصوى للاقتران هـ(س) = س − ٥ ؟

أ ٣　　ب ٢　　جـ ١　　د لا يوجد

٢) ما عدد القيم القصوى للاقتران هـ(س) = س^{٢} − ٤س ؟

أ ٣　　ب ٢　　جـ ١　　د لا يوجد

٣) ما عدد القيم القصوى للاقتران ل(س) = س^{٣} + ٧ ؟

أ ٣　　ب ٢　　جـ ١　　د صفر

٤) ما عدد القيم القصوى للاقتران م(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٥س − ١ ؟

أ ٣　　ب ٢　　جـ ١　　د لا يوجد

٥) ليكن ق(س) = ٣س^{٢} − ٦س + ٧ ، س ∈ ح ، فما قيمة س التي يكون للاقتران ق(س) عندها قيمة صغرى محلية؟

أ ٦　　ب ٠　　جـ ١　　د −١

٦) ليكن ك(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} − ١٠س + ٤ ، فما قيمة س التي يكون للاقتران ك(س) عندها قيمة عظمى محلية؟

أ −٢　　ب ٢　　جـ −٣　　د ٥

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٧) إذا كان للاقتران هـ(س) قيمة صغرى محلية عند النقطة (٣ ، ٩) ، فما قيمة هـ(٣)؟

أ ٣　　ب ٩　　جـ ٠　　د ١

٨) إذا كان للاقتران م(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة (−٢، ٤) ، فما قيمة م′(−٢)؟

أ −٢　　ب ١　　جـ ٤　　د ٠

٩) إذا كان الاقتران ق(س) = أس^{٢} + ٤س − ٥ ، لهُ قيمة صغرى محلية عند س = ١ ، فما قيمة الثابت أ ؟

أ −١　　ب −٢　　جـ ٢　　د −٤

١٠) إذا كان للاقتران هـ(س) = −س^{٢} − ب س + ١٠ ، قيمة عظمى محلية عند س = ٢ ، فما قيمة الثابت ب ؟

أ ٤　　ب −٢　　جـ −١　　د −٤

(١١) إذا كان ق′(س) = ٦ − ٣س ، فما الفترة التي يكون فيها الاقتران ق(س) متناقصاً ؟

أ $[-\infty, 2[$ ب $[2, \infty[$ ج $]-\infty, 2]$ د $]-2, \infty]$

(١٢) ما فترة التناقص للاقتران ق(س) = ٢س^٢ − ٤س + ٣ ، س ∈ ح ؟

أ $[1, \infty[$ ب $[-1, \infty[$ ج $]-\infty, -1]$ د $]-\infty, 1]$

(١٣) ما فترة التزايد للاقتران م(س) = −٣س^٢ + ١٢س − ٥ ، س ∈ ح ؟

أ $[2, \infty[$ ب $[-2, \infty[$ ج $]-\infty, 2]$ د $]-\infty, -2]$

(١٤) ما فترة التناقص للاقتران هـ(س) = س^٣ − ٢٧س ، س ∈ ح ؟

أ $[3, \infty[\cup]-\infty, -3]$ ب $[3, \infty[$ ج $]-\infty, -3]$ د $[-3, 3]$

(١٥) ما فترة التناقص للاقتران ل(س) = −س^٣ + ٣س + ٥ ، س ∈ ح ؟

أ $[1, \infty[\cup]-\infty, -1]$ ب $[1, \infty[$ ج $]-\infty, -1]$ د $[-1, 1]$

(١٦) ما فترة التزايد للاقتران ك(س) = $\frac{٢}{٣}$س^٣ − ٨س − ٣ ، س ∈ ح ؟

أ $[2, \infty[\cup]-\infty, -2]$ ب $[2, \infty[$ ج $]-\infty, -2]$ د $[-2, 2]$

(١٧) فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كان للاقتران ق(س) ، قيمة صغرى محلية عند النقطة (٢، ٣) ، فما قيمة ق′(٢) ؟

إعداد المعلم : سائد الحلاق

أ صفر ب $\frac{٣}{٢}$ ج ٢ د ٣

(١٨) فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان ق′(س) = ٨ − ٢س ، فما الفترة التي يكون فيها الاقتران ق(س) متزايداً ؟

أ $]-\infty, 4]$ ب $[4, \infty[$ ج $]-\infty, -4]$ د $]-4, \infty]$

(١٩) فلسطين : ٢٠١٩

ما عدد القيم القصوى للاقتران ع(س) = ٢س^٣ + ٢ ، س ∈ ح؟

أ ٢ ب ١ ج ٣ د صفر

٢٠ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

إذا كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة (−١٠، ٥) ، فما قيمة ق′(١٠)؟

أ) ٥ ب) −١٠ جـ) صفر د) ٣

٢١ طولكرم : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كان للاقتران ق(س) = ب $س^٢$ − ٤س + ٥ ، س ∈ ح قيمة صغرى محلية س = ١ ، فإن قيمة ب = ...

أ) ٤ ب) ١ جـ) −٢ د) ٢

٢٢ الوسطى : ٢٠١٩ تجريبي

الاقتران ق(س) = $س^٢$ + ٤س له قيمة قصوى عند س =

أ) ٤ ب) ٢ جـ) −٤ د) −٢

٢٣ شرق غزة: ٢٠١٩ تجريبي

إذا كان للاقتران ق(س) = $س^٢$ − أس + ٤ ، س ∈ ح قيمة صغرى محلية س = ٣ ، فإن قيمة أ = ...

أ) ٦ ب) −٦ جـ) ٤ د) −٤

٢٤ فلسطين : ٢٠١٨ إكمال ديسمبر

إذا كان ق(س) = ٨س − ٢$س^٢$ ، فإن قيمة س التي تجعل للاقتران ق(س) عندها قيمة عظمى محلية هي:

أ) ٨ ب) ٤ جـ) ٢ د) −٢

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٢٥ فلسطين : ٢٠١٧

إذا كان ق(س) = أ$س^٢$ + ٨س + ٩ لهُ قيمة صغرى محلية عند س = −٢ فإن قيمة الثابت أ تساوي:

أ) ٣ ب) ٢ جـ) ١ د) ٤

٢٦ فلسطين : ٢٠١٦

الاقتران ق(س) = ٦س − $س^٢$ لهُ قيمة عظمى محلية تساوي:

أ) ٣ ب) ٦ جـ) ٩ د) ١٢

٢٧ فلسطين : ٢٠١٦ إكمال

إذا كان ق(س) = $س^٢$ − ٤س + ٥ ، فإن القيمة الصغرى المحلية للاقتران ق(س) هي:

أ) ٥ ب) ٢ جـ) ١ د) صفر

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال		الجواب النهائي
١	عين القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل من الاقترانات التالية:		
	أ $ق(س)=٣س^{٢}-١٢س+١$ ، س ∈ ح	أ	قيمة صغرى محلية عند $س=٢$
	ب $هـ(س)=-س^{٢}+٨س-٤$ ، س ∈ ح	ب	قيمة عظمى محلية عند $س=٤$
	جـ $م(س)=س^{٣}+١٢٥$ ، س ∈ ح	ج	لا يوجد
	د $ك(س)=-س^{٣}+٣س^{٢}+١$ ، س ∈ ح	د	قيمة عظمى محلية $س=٢$ قيمة صغرى محلية $س=٠$
	هـ $ل(س)=(س-٣)(٢س+٢)$ ، س ∈ ح	هـ	قيمة صغرى محلية عند $س=١$
	و $ق(س)=س^{٤}\left(\frac{١}{س}\right)+٢٧$ ، س ∈ ح	و	لا يوجد
	ز $ل(س)=س\left(٣س+س^{٢}\right)$ ، س ∈ ح	ز	قيمة صغرى محلية $س=٠$ قيمة عظمى محلية $س=-٢$
٢	ابحث تزايد وتناقص الاقتران ق(س) حيث: $ق(س)=٥س^{٢}-٥س+٥$ ، س ∈ ح		متزايد $[\frac{١}{٢}،\infty[$ متناقص، $]-\infty،\frac{١}{٢}]$
٣	ابحث تزايد وتناقص الاقتران هـ(س) حيث: $هـ(س)=س^{٣}-٦س^{٢}+٩س+٥$ ، س ∈ ح		متناقص $[١،٣]$ متزايد $]-\infty،١]\cup[٣،\infty[$
٤	أبين أنهُ لا يوجد للاقتران $هـ(س)=٦س^{٣}-٦$ ، س ∈ ح قيم قصوى محلية في مجالهُ.		يترك للطالب
٥	إذا كان الاقتران $ق(س)=٤س^{٢}-١٦س+١$ ، س ∈ ح ، جد أ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على ح	أ	متزايد $[٢،\infty[$ متناقص $]-\infty،٢]$
	ب القيم القصوى للاقتران ق(س) ، ثم حدد نوعها	ب	قيمة صغرى محلية $س=٢$ $ق(٢)=-١٥$
٦	إذا كان الاقتران $ق(س)=-٢س^{٣}+٩س^{٢}-١٢س-١$ ، س ∈ ح ، جد أ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على ح	أ	متناقص $]-\infty،١]\cup[٢،\infty[$ متزايد $[١،٢]$
	ب القيم القصوى للاقتران ق(س) ، ثم حدد نوعها	ب	قيمة صغرى محلية $س=١$ قيمة عظمى محلية $س=٢$

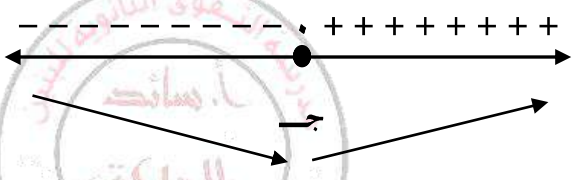
إعداد المعلم : سائد الحلاق

٧	إذا كان الاقتران ق(س) = س^{٣} – ب س^{٢} + ٥ ، س ∈ ح ، قيمة صغرى محلية عند س = ٢ ، جد قيمة الثابت ب .	ب = ٣
٨	ما قيمة الثابت جـ للاقتران م(س) = جـ س^{٣} – ٣ س^{٢} + ٣ س – ٢ ، س ∈ ح ، والتي تجعل لهُ قيمة قصوى محلية عند س = ١ ؟	جـ = ١
٩	ليكن الاقتران هـ(س) = س^{٣} – أ س^{٢} - ٣ ، س ∈ ح ، ما قيمة الثابت أ التي تجعل هـ َ(٢) = ٠ ؟	أ = ٣
١٠	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال إذا كان الاقتران ق(س) = س^{٣} + ٣ س^{٢} – ٩ س ، س ∈ ح ، جد أ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على مجاله ب القيم القصوى للاقتران ق(س) ، وأحدد نوعها	متزايد]–∞، –٣] ∪ [١، ∞[متناقص [–٣، ١] قيمة عظمى محلية س = –٣ ق(–٣) = –٢٧ قيمة صغرى محلية س = ١ ق(١) = –٥
١١	فلسطين : ٢٠٢٠ إذا كان الاقتران ق(س) = س^{٣} – ٤٨ س ، س ∈ ح ، جد: أ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على ح ب القيم القصوى للاقتران ق(س) ، ثم حدد نوعها	متزايد]–∞، –٤] ∪ [٤، ∞[متناقص [–٤، ٤] قيمة عظمى محلية س = –٤ ق(–٤) = ١٢٨ قيمة صغرى محلية س = ٤ ق(٤) = ١٢٨
١٢	نابلس : ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان للاقتران ق(س) = س^{٣} – جـ س – ٦ قيمة صغرى محلية عند س = ٢ أوجد قيمة س التي تجعل للاقتران عندها قيمة عظمى محلية.	س = –٢
١٣	فلسطين : ٢٠١٩ إذا كان الاقتران ق(س) = س^{٢} (س – ٣) ، س ∈ ح ، جد أ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على ح ب القيم القصوى للاقتران ق(س) ، ثم حدد نوعها	أ: متزايد]–∞، ٠] ∪ [٢، ∞[متناقص [٠، ٢] ب: قيمة عظمى محلية س = ٠ ق(٠) = ٠ قيمة صغرى محلية س = ٢ ق(٢) = –٤

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١٤	فلسطين: ٢٠١٩ إكمال إذا كان الاقتران ق(س) $= \frac{1}{3}$ س^3 − ٤س + ٥، س ∈ ح ، جد أ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على ح ب القيم القصوى للاقتران ق(س) ، ثم حدد نوعها	أ	متزايد [−∞،−٢]∪[٢،∞[متناقص [−٢،٢]
		ب	قيمة عظمى محلية س = −٢ ق(−٢) = $\frac{31}{3}$ قيمة صغرى محلية س = ٢ ق(٢) = $-\frac{1}{3}$
١٥	طوباس : ٢٠١٩ تجريبي أجد القيم القصوى للاقتران ق(س) = (س + ٣)(س − ٢) ، س ∈ ح ،وحدد نوعها		قيمة صغرى محلية س = $-\frac{1}{2}$ ق$\left(-\frac{1}{2}\right)$ = −٦,٢٥
١٦	شرق غزة : ٢٠١٩ تجريبي عين فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = س^3 − ٣س^2، س ∈ ح		متزايد]−∞،٠]∪[٢،∞[متناقص [٠،٢]
١٧	جنين : ٢٠١٩ تجريبي ف١ إذا كان الاقتران ق(س) = أس^3 + ٢س + ب ، س ∈ ح ، وكان ق′(١) = ٥ ، ومنحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (٢،−٣) ، فما قيمة الثابتين أ،ب ؟		أ = ١ ب = −١٥
١٨	رفح : ٢٠١٩ تجريبي ف١ — فلسطين : ٢٠١٦ إذا كان الاقتران ق(س) = أس^2 − ٤س + ب ، س ∈ ح ، قيمة صغرى محلية عند س = ٢ وكان ق(٢) = ٠ ، جد قيمة أ،ب		أ = ١ ب = ٤
١٩	يطا (١): ٢٠١٩ تجريبي ف١ إذا كان الاقتران ق(س) = أس^2 − ب س ، س ∈ ح ،قيمة صغرى محلية مقدارها (−٤) عندما س = ٢ ، جد قيمة كل من أ،ب.		أ = ١ ب = ٤
٢٠	يطا (٢): ٢٠١٩ تجريبي ف١ إذا كان الاقتران ق(س) = أس^2 + ب س ، س ∈ ح ،قيمة صغرى محلية عند النقطة (−١،−١) ، أوجد قيمة كل من أ،ب.		أ = ١ ب = ٢

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٢١	فلسطين: ٢٠١٨ إذا كان الاقتران $ق(س) = س^{٢} - ب س + ٢$ ، $س \in ع$، وكانت إشارة $ق'(س)$ كما في الشكل المجاور ، أوجد قيمة ب،جـ علماً بأن $ق(١) = -٤$ 	$ب = ٧$ $جـ = \frac{٧}{٢}$
٢٢	فلسطين : ٢٠١٤إكمال بين أنهُ لا يوجد للاقتران $ق(س) = ٨ - س^{٣}$ ، $س \in ع$ ، أي قيم قصوى محلية.	أجب بنفسك
٢٣	فلسطين : ٢٠١٤ إذا كان الاقتران $ق(س) = س^{٣} + أس^{٢} - ٩س + ب$ ،قيمة صغرى محلية عند $س = ١$ تساوي ٣ ، أوجد الثابتين أ،ب .	$أ = ٣$ $ب = ٨$
٢٤	فلسطين : ٢٠١٣ إذا كان الاقتران $ق(س) = س^{٣} - ب س^{٢}$ ،قيمة صغرى محلية عند $س = ٢$ ، جد قيمة الثابت ب ، ثم احسب $ق'(٣)$	$ب = ٣$ $ق'(٣) = ٩$
٢٥	فلسطين : ٢٠١٢ — فلسطين : ٢٠٠٨ جد القيم القصوى للاقتران $ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢}$ ، وحدد نوعها	قيمة عظمى محلية $س = ٠$ $ق(٠) = ٠$ قيمة صغرى محلية $س = ٢$ $ق(٢) = -٤$
٢٦	فلسطين : ٢٠٠٩ عين القيم القصوى للاقتران $ق(س) = س^{٢} - ٦س + ٥$	قيمة صغرى محلية عند $س = ٣$ $ق(٣) = -٤$
٢٦	فلسطين : ٢٠٠٨ إكمال عين القيم القصوى للاقتران $ق(س) = -س^{٢} + ١٠س + ٥$	قيمة عظمى محلية عند $س = ٥$ $ق(٥) = ٣٠$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

دولة فلسطين وزارة التربية والتعليم العالي مديرية التربية والتعليم ــ غرب غزة	اختبار التفاضل		الاسم:	
	مادة الاختبار	الرياضيات		
	عدد الصفحات	١	المدرسة:		العلامة
	التاريخ:		الصف:	الثاني عشر أدبي وشرعي ( )	
	إعداد المعلم	سائد زياد الحلاق	الزمن:	ستون دقيقة	٣٠

السؤال الأول: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة: (٩) علامات

١) ما متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\frac{٢}{س}$ + س ، عندما تتغير س من س$_١$ = ٢ إلى س$_٢$ = ٤؟

أ) ٢$\frac{١}{٢}$ ب) ٧$\frac{١}{٢}$ جـ) ـ ١$\frac{١}{٢}$ د) ١$\frac{١}{٢}$

٢) إذا كان الاقتران ص = $\frac{٢س}{س^{-٣}}$ ، فإن $\frac{دص}{دس}$ يساوي :

أ) ـ ٤س$^{-٣}$ ب) ـ ٤س$^{-١}$ جـ) ٨س^{٣} د) ٦س^{٢}

٣) إذا كان الاقتران هـ(س) = $\frac{٢أ^{٢}}{س^{٤}}$ ، وكان هـَ(١) = ـ٧٢ . فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ∓٣   ب) ـ ٣   جـ) $\sqrt{٩}$ د) ٧٢

٤) إذا كان (ق × هـ)َ(٢) = ـ١٢ ، ق(٢) = ٦ ، هـَ(٢) = ـ٤ ، ٥ هـ(٢) = ـ١٠ ، فما قيمة قَ(٣)؟

أ) ـ ٢   ب) ٢   جـ) ٦   د) ـ ٦

٥) إذا كان الاقتران ق(س) = $\frac{٢ - س}{-٢س}$ ، فما قيمة قَ(١)؟

أ) صفر   ب) ٤   جـ) ـ ١   د) ١

٦) إذا كان الاقتران ق(س) = ٤س + س^{٢} ، فإن قيمة س التي تجعل للاقتران ق(س) عندها قيمة صغرى محلية هي:

أ) ٢   ب) ـ ٢   جـ) ـ ٤   د) ٤

إعداد المعلم : سائد الحلاق

السؤال الثاني: (٦) علامات

إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س في الفترة [٢ ، ٤] هو ١٥ ، جد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ٢س ق(س) ـ ١ في نفس الفترة ، علماً بأن ق (٤) = ٢ .

السؤال الثالث : (٥) علامات

إذا كان : ق(س) = $\frac{١ - ٢س}{هـ(س)}$ ، جد هـَ(١) ، إذا علمت أن : ق(١) = ٣ ، قَ(١) = ٣

السؤال الرابع : (١٠) علامات

إذا كان الاقتران ق(س) = ٢س^{٣} ـ ٦س + ١ ، س ∈ ح ، جد:

أ| فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على ح   ب| القيم القصوى للاقتران ق(س) ، ثم حدد نوعها.

إنتهى


الوحدة الأولى

ثانياً

التكامل

ملخص التكامل

إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ اقتراناً مشتقتهُ الأولى $\text{ق}'(\text{س})$ ، فإن التكامل غير المحدود للاقتران $\text{ق}'(\text{س})$ بالنسبة لـــ س

يساوي $\text{ق}(\text{س}) + \text{جـ}$ ، ويرمز لعملية التكامل بالرمز $\int$

، وبصورة عامة فإن : $\int \text{ق}'(\text{س})\, \text{ء س} = \text{ق}(\text{س}) + \text{جـ}$ ، حيث $\text{جـ} \in \text{ح}$

قواعد التكامل غير المحدود

قاعدة ١

$\int \text{أ}\,.\,\text{ء س} = \text{أ س} + \text{جـ}$ ، حيث أ ، جـ عدادان حقيقيان.

قاعدة ٢

$\int \text{س}^{\text{ن}}\,.\,\text{ء س} = \dfrac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{جـ}$ ، حيث ن ، جـ عدادان حقيقيان ، $\text{ن} \neq -1$

قاعدة ٣

إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ ، $\text{هـ}(\text{س})$ اقترانين قابلين للتكامل

فإن: $\int (\text{ق} \pm \text{هـ})(\text{س})\,.\,\text{ء س} = \int \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{ء س} \pm \int \text{هـ}(\text{س})\,.\,\text{ء س}$

إعداد المعلم سائد الحلاق

قاعدة ٤

إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ اقتراناً قابلاً للتكامل وكان $\text{ع}(\text{س}) = \text{ك}.\text{ق}(\text{س})$ حيث ك عدد حقيقي ، $\text{ك} \neq -1$ ،

فإن: $\int (\text{ع}(\text{س}))\,.\,\text{ء س} = \int \text{ك}.\text{ق}(\text{س})\,.\,\text{ء س} = \text{ك}.\int \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{ء س}$

التكامل المحدود

تعريف

التكامل المحدود : إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}'(\text{س})\,.\,\text{ء س} = \text{ق}(\text{س}) \Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ})$$

حيث أ : الحد الأدنى ، ب : الحد الأعلى ، $\text{ب} ، \text{أ} \in \text{ح}$

ملاحـــظات هامة

١) مشتقة التكامل غير المحدود تساوي نفسهُ.

٢) ثابت التكامل جـ لا يكتب في التكامل المحدود .

٣) مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر دائماً .

٤) تكامل العدد الثابت المحدود $\int_{ب}^{أ} (جـ).ءس = جـ\,(أ - ب)$: جـ ، أ ، ب أعداد حقيقية

خصائص التكامل غير المحدود

حيث أ ، ب عدادان حقيقيان.

قاعدة ١

$$\int_{ب}^{ب} ق(س).ءس = صفر$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

قاعدة ٢

$$\int_{أ}^{ب} ق(س).ءس = -\int_{ب}^{أ} ق(س).ءس$$ (خاصية العكس)

قاعدة ٣

$$\int_{أ}^{ب} ق(س).ءس = \int_{أ}^{جـ} ق(س).ءس + \int_{جـ}^{ب} ق(س).ءس$$ (خاصية الإضافة)

قاعدة ٤

$$\int_{أ}^{ب} (جـ\ ق(س)).ءس = جـ \int_{أ}^{ب} (ق(س)).ءس$$: جـ ، أ، ب أعداد حقيقية

١ – ٥ التكامل غير المحدود

مقدمة : التكامل وبكل بساطة هو عملية عكسية للتفاضل وبالتالي أصعب من التفاضل ، وكما هو متعارف عليه بأن العمليات العكسية أصعب كالقسمة والضرب والتربيع وإيجاد الجذر التربيعي، ومن المفيد أيضاً معرفتنا المسبقة بكل قواعد من القوانين التي سيكون لها الأثر الفعال في التكامل.

إذا كان ق(س) اقتراناً مشتقتهُ الأولى ق′(س) ، فإن التكامل غير المحدود للاقتران ق′(س) بالنسبة لـــ س يساوي ق(س) + جـ ، ويرمز لعملية التكامل بالرمز $\int$ ، بصورة عامة فإن $\int$ ق′(س) دس = ق(س) + جـ ، حيث جـ عدد حقيقي .

قواعد التكامل غير المحدود

قاعدة ١

$\int$ أ . دس = أ س + جـ ، حيث أ ، جـ عدادان حقيقيان.

مثال

$\int$ ٧ . دس = ٧س + جـ

قاعدة ٢

$\int$ س^{ن} . دس = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ ، حيث ن ، جـ عدادان حقيقيان ، ن ≠ −١

مثال

$\int$ س^{٤} . دس = $\frac{س^{٤+١}}{٤+١}$ + جـ = $\frac{س^{٥}}{٥}$ + جـ = $\frac{١}{٥}$س + جـ

قاعدة ٣

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل فإن: $\int$ (ق ± هـ)(س). دس = $\int$ ق(س). دس ± $\int$ هـ(س). دس

مثال

$\int$ (س^{٢} + س) . دس = $\int$ (س^{٢}) . دس + $\int$ (س) . دس = $\frac{س^{٣}}{٣}$ + $\frac{س^{٢}}{٢}$ + جـ

قاعدة ٤

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل وكان ع(س) = ك.ق(س) حيث ك عدد حقيقي ، ك ≠ −١ ، فإن:

$\int$ (ع(س)) . دس = $\int$ ك.ق(س) . دس = ك . $\int$ ق(س) . دس

مثال

$\int$ ٣(س^{٢}) . دس = ٣ $\int$ (س^{٢}) . دس = ٣ × $\frac{س^{٣}}{٣}$ + جـ = س^{٣} + جـ

ملاحظات هامة

١) لا توجد قاعدة عامة لتكامل حاصل ضرب اقترانيين أو خارج قسمة اقترانين.

$$\int \left(ق(س) \times هـ(س)\right) ءس \neq \int ق(س)\, ءس \times \int هـ(س)\, ءس \quad ، \quad \int \left(\frac{ق(س)}{هـ(س)}\right) ءس \neq \frac{\int ق(س)\, ءس}{\int هـ(س)\, ءس}$$

٢) التكامل يوزع على الجمع والطرح ولا يوزع على الضرب أو القسمة .

٣) مشتقة التكامل غير المحدود تساوي نفسه. $\quad ص = \int س^{٢} + س\ . ءس \Leftarrow صَ = س^{٢} + س$

أمثلة محلولة

مثال ١ احسب كلاً من التكاملات التالية:

١) $\int ٨\ . ءس = ٨س + جـ$

٢) $\int ٢س\ . ءس = \frac{٢س^{٢}}{٢} + جـ = س^{٢} + جـ$

٣) $\int س^{-٤}\ . ءس = \frac{س^{-٣}}{-٣} + جـ$

٤) $\int س^{\frac{٢}{٣}}\ . ءس = \frac{س^{\frac{٢}{٣}+١}}{\frac{٢}{٣}+١} + جـ = \frac{س^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣}} + جـ = \frac{٣}{٥}س^{\frac{٥}{٣}} + جـ$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٥) $\int \sqrt{س}\ . ءس = \int س^{\frac{١}{٢}}\ . ءس = \frac{س^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} + جـ = \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

٦) $\int \sqrt[٣]{س}\ . ءس = \int س^{\frac{١}{٣}}\ . ءس = \frac{س^{\frac{١}{٣}+١}}{\frac{١}{٣}+١} + جـ = \frac{س^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + جـ = \frac{٣}{٤}س^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

٧) $\int ٤س^{٣} + س\ . ءس = \frac{٤}{٤}س^{٤} + \frac{س^{٢}}{٢} + جـ = س^{٤} + \frac{١}{٢}س^{٢} + جـ$

٨) $\int (٢س^{-٥} + ٦س^{٢})\ . ءس = \frac{٢}{-٤}س^{-٤} + \frac{٦س^{٣}}{٣} + جـ = -\frac{١}{٢}س^{-٤} + ٢س^{٣} + جـ$

٩) $\int \left(٨س^{٣} - \frac{١}{٢س^{٢}}\right) . ءس = \int \left(٨س^{٣} - \frac{١}{٢}س^{-٢}\right) . ءس = \frac{٨}{٤}س^{٤} - \frac{١}{٢\times -١}س^{-١} + جـ = ٢س^{٤} + \frac{١}{٢س} + جـ$

مثال ٢ احسب كلاً من التكاملات التالية:

١) $\int \frac{٨}{٥} س^{\frac{٣}{٥}} + ٣\sqrt{س} \,.ءس$

$= \int \frac{٨}{٥} س^{\frac{٣}{٥}} + ٣س^{\frac{١}{٢}} \,.ءس = \frac{\frac{٨}{٥} س^{\frac{٣}{٥}+١}}{\frac{٣}{٥}+١} + \frac{٣س^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} + جـ = \frac{\frac{٨}{٥} س^{\frac{٨}{٥}}}{\frac{٨}{٥}} + \frac{٣س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$= \frac{٥}{٨} \times \frac{٨}{٥} س^{\frac{٨}{٥}} + \frac{٢}{\cancel{٣}} \times \cancel{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ = س^{\frac{٨}{٥}} + ٢س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

٢) $\int \frac{١}{٢\sqrt{س}} .ءس = \int \frac{١}{٢س^{\frac{١}{٢}}} .ءس = \int \frac{١}{٢} س^{\frac{-١}{٢}} .ءس = \frac{\cancel{\frac{١}{٢}} س^{\frac{١}{٢}}}{\cancel{\frac{١}{٢}}} + جـ = س^{\frac{١}{٢}} + جـ = \sqrt{س} + جـ$

٣) $\int (س+١)(س-١) .ءس = \int (س^{٢} - س + س - ١) .ءس = \int (س^{٢} - ١) .ءس = \frac{س^{٣}}{٣} - س + جـ$

٤) $\int \frac{س^{٢} + ٨س}{س+٨} .ءس$ (نحاول التبسيط) $\int \frac{س\cancel{(س+٨)}}{\cancel{س+٨}} .ءس = \int س .ءس = \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

٥) $\int \pi .ءس = \pi س + جـ$

٦) $\int هـ^{٢} .ءس = هـ^{٢} س + جـ$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

٧) $\int هـ^{٣} .ءص = هـ^{٣} ص + جـ$

مثال ٣

أجد قاعدة الاقتران ق(س) الذي مشتقته $ق'(س) = ٣س^{٢} + ٤س + ٣$، علماً بأن $ق(-١) = ٣$

الحـــل

$ق(س) = \int ق'(س) .ءس$

$ق(س) = \int (٣س^{٢} + ٤س + ٣) .ءس = \frac{٣}{٣} س^{٣} + \frac{٤}{٢} س^{٢} + ٣س + جـ = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٣س + جـ$

$ق(-١) = (-١)^{٣} + ٢(-١)^{٢} + ٣(-١) + جـ$

$٣ = -١ + ٢ - ٣ + جـ \leftarrow ٣ = -٢ + جـ \leftarrow \boxed{جـ = ٥}$

$\leftarrow$ قاعدة الاقتران $\boxed{ق(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٣س + ٥}$

مثال ٤

أجد قاعدة الاقتران ق(س) الذي مشتقته ق′(س) = $٣\sqrt{\text{س}} - ٥$، علماً بأن ق(١) = ١٥

الحل

$$\text{ق(س)} = \int \text{ق}'\text{(س)}\ \text{ءس}$$

$$\text{ق(س)} = \int (٣\sqrt{\text{س}} - ٥)\ \text{ءس} = \int (٣\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٥)\ \text{ءس} = \frac{٢}{٣} \times ٣\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ٥\text{س} + \text{جـ} = ٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ٥\text{س} + \text{جـ}$$

$$\text{ق(١)} = ٢(١)^{\frac{٣}{٢}} - ٥(١) + \text{جـ}$$

$$١٥ = +٢ - ٥ + \text{جـ} \leftarrow ١٥ = -٣ + \text{جـ} \leftarrow \boxed{\text{جـ} = ١٨}$$

← قاعدة الاقتران $\boxed{\text{ق(س)} = ٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ٥\text{س} + ١٨ = ٢\sqrt{\text{س}^٣} - ٥\text{س} + ١٨}$

مثال ٥

إذا كان ق(س) = $\int (٣\text{س}^٣ - ٢\text{س} + ٥)\ \text{ءس}$ ، جد ق′(٢)

الحل

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$$\text{ق(س)} = \int (٣\text{س}^٣ - ٢\text{س} + ٥)\ \text{ءس}$$

$$\text{ق}'\text{(س)} = ٣\text{س}^٣ - ٢\text{س} + ٥$$

$$\text{ق}'(٢) = ٣(٢)^٣ - ٢(٢) + ٥ = \boxed{٢٥}$$

مثال ٦

إذا كان $\int$ ق′(س) = ٤س^٣ − ٢س^٢ + جـ ، جد ق′(س)

الحل

$$\text{ق(س)} = \int \text{ق}'\text{(س)}$$

$$\text{ق(س)} = ٤\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢ + \text{جـ}$$

$$\text{ق}'\text{(س)} = ١٢\text{س}^٢ - ٤\text{س}$$

مثال ٧

إذا كان $ق(س) = ٤\sqrt{س} + \int (٢\sqrt{س})\,.ءس$ ، جد $ق'(١)$

الحـــل

$$ق(س) = ٤\sqrt{س} + \int (٢\sqrt{س})\,.ءس$$

$$ق'(س) = \frac{٤}{٢\sqrt{س}} + (٢\sqrt{س})$$

$$ق'(١) = \frac{\cancel{٤}^{\,٢}}{\cancel{٢}\sqrt{١}} + (٢\sqrt{١})$$

$$= ٢ + ٢ = \boxed{٤}$$

مدرسة النقوى الثانوية للبنين
أ. سائد
الحلاق
مديرية غرب غزة

مثال ٨

احسب : $\int \frac{س^{٢}}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}\,.ءس$

الحـــل

$$\int \frac{س^{٢}}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}\,.ءس = \int \frac{س^{٢}}{س^{\frac{٢}{٣}}}\,.ءس = \int س^{٢} \times س^{\frac{-٢}{٣}}\,.ءس = \int س^{\frac{٤}{٣}}\,.ءس$$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

$$\frac{٣}{٧} س^{\frac{٧}{٣}} + جـ = \frac{٣}{٧} \sqrt[٣]{س^{٧}} + جـ$$

مثال ٩

إذا كان $\int ق'(س) = أ\,س^{٣} + ١٨س + جـ$ ، وكان $ق'(١) = ١٢$ ، فما قيمة الثابت أ ؟

الحـــل

$$ق(س) = \int ق'(س)$$

$$ق(س) = أ\,س^{٣} + ١٨س + جـ$$

$$ق'(س) = ٣أس^{٢} + ١٨$$

$$ق'(١) = ٣أ(١)^{٢} + ١٨$$

$$١٢ = ٣أ + ١٨ \leftarrow ١٢ - ١٨ = ٣أ \leftarrow ٣أ = -٦ \leftarrow أ = \boxed{-٢}$$

التكامل غير المحدود (١-٥) | حلول الكتاب الوزاري صفحة ٣٠

(١)

أ) $\int (\text{٣س}^{٢} + \text{٤س} - ٥)\,\text{ءس} = \frac{\cancel{٣}\text{س}^{٣}}{\cancel{٣}} + \frac{\cancel{٤}\text{س}^{٢}}{\cancel{٢}} - \text{٥س} + \text{جـ} = \boxed{\text{س}^{٣} + \text{٢س}^{٢} - \text{٥س} + \text{جـ}}$

ب) $\int \text{س}^{\frac{٢}{٥}}\,\text{ءس} = \boxed{\frac{٥}{٧}\text{س}^{\frac{٧}{٥}} + \text{جـ}}$

جـ) $\int \sqrt[٧]{\text{س}}\,\text{ءس} = \int \text{س}^{\frac{١}{٧}}\,\text{ءس} = \boxed{\frac{٧}{٨}\text{س}^{\frac{٨}{٧}} + \text{جـ}}$

ء) $\int \left(\text{٦س}^{-٤} + \frac{٢}{\text{٥س}^{٢}}\right)\text{ءس} = \int \left(\text{٦س}^{-٤} + \frac{٢}{٥}\text{س}^{-٢}\right)\text{ءس}$

$= \frac{\text{٦س}^{-٣}}{-٣} + \frac{\text{٢س}^{-١}}{٥ \times -١} + \text{جـ} = \boxed{\frac{-٢}{\text{س}^{٣}} - \frac{٢}{\text{٥س}} + \text{جـ}}$

هـ) $\int (\text{٥٦س}^{٣} + \text{٧س}^{٢} + \text{٣س})\,\text{ءس}$

$= \frac{\cancel{٥٦}^{١٤}\text{س}^{٤}}{\cancel{٤}} + \frac{\text{٧س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{٣س}^{٢}}{٢} + \text{جـ}$

$= \boxed{\text{١٤س}^{٤} + \frac{\text{٧س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{٣س}^{٢}}{٢} + \text{جـ}}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

و) $\int (٥)^{٢٠٠٤}\,\text{ءس} = \boxed{(٥)^{٢٠٠٤}\,\text{س} + \text{جـ}}$

(٢)

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س}^{٥} - \text{٤س}^{٣} + ٨$

$\text{ق}'(١) = (١)^{٥} - ٤(١)^{٣} + ٨ = \boxed{٥}$

(٣)

$\text{ق}(\text{س}) = \text{٣س}^{٢} + \text{٢س} + \text{جـ}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \boxed{\text{٦س} + ٢}$

(٤)

$\text{ص} = \int (\text{س}^{٢} + ٣)\,\text{ءس} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \boxed{\text{س}^{٢} + ٣}$

ورقة عمل ٥ – ١ التكامل غير المحدود

أولاً إختر الإجابة الصحيحة

١) $\int \sqrt{8}\,.\,\text{ءس} =$

أ $\sqrt{8} + \text{جـ}$ ب $2 + \text{جـ}$ جـ $\text{٢س} + \text{جـ}$ د $\text{٨س} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{س}^{-3}\,.\,\text{ءس} =$

أ $\text{س}^{-3} + \text{جـ}$ ب $-\frac{1}{4}\text{س}^{-4} + \text{جـ}$ جـ $-\frac{1}{2}\text{س}^{-2} + \text{جـ}$ د $\text{س}^{-2} + \text{جـ}$

٣) أي من الاقترانات التالية يمثل اقتراناً أصلياً للمشتقة $\text{ق}'(\text{س}) = \text{٣س}^{2}$ ؟

أ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{3}$ ب $\text{ق}(\text{س}) = \text{٢س}^{4}$ جـ $\text{ق}(\text{س}) = \text{٦س} + \text{جـ}$ د $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{3}$

٤) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \int(\text{٣س}^{2} - \text{٢س} + \text{جـ})\,\text{ءس}$ ، وكان $\text{ق}'(1) = 7$ ، فما قيمة الثابت جـ ؟

أ ٦ ب ٨ جـ ٢ د −٦

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٥) إذا كان $\text{ص} = \int \text{٥س}^{2}\,.\,\text{ءس}$ ، فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} =$

أ $\frac{5}{3}\text{س}^{3}$ ب ١٠س جـ $\text{٥س}^{2} + \text{جـ}$ د ٥س^{2}

٦) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \int \sqrt{\text{س}}\,.\,\text{ءس}$ ، فما قيمة $\text{ق}'(4)$؟

أ ٢ ب ٦ جـ ٣ د ٨

٧) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \int(\text{٣س}^{2})\,.\,\text{ءس}$ ، فما قيمة $\text{ق}'(-2)$؟

أ −٨ ب −٢٤ جـ ١٢ د −١٢

٨) إذا كان $\int \text{ق}'(\text{س}) = \frac{1}{3}\text{س}^{3} + \text{جـ}$ ، فإن $\text{ق}'(\text{س}) =$

أ $\frac{1}{12}\text{س}^{4}$ ب $\text{س}^{2} + \text{جـ}$ جـ س^{2} د $\frac{1}{3}\text{س}^{3} + \text{جـ}$

٩) إذا كان $\int$ ق′(س) = ٢س^{٢} − س + جـ ، فما قيمة ق′(−٢) ؟

أ) ٧ ب) ٦ جـ) ٩ د) −٩

١٠) فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان $\int$ ق′(س) = س^{٢} − ٧س + جـ ، فما قيمة ق′(٢) ؟

أ) $\frac{٧}{٢}$ ب) ١ جـ) −٦ د) −٣

١١) فلسطين : ٢٠١٩ إكمال ديسمبر

إذا كان $\int$ ق′(س) = ٣س^{٢} − ٤س + جـ ، فما قيمة ق′(٢) ؟

أ) ٤ ب) −٢ جـ) ١٢ د) ٨

١٢) فلسطين: ٢٠١٩ إكمال أغسطس

إذا كان ك(س) = $\int$(٢س^{٣} + جـ) دس ، وكان ك′(−١) = ٥ ، فما قيمة الثابت جـ ؟

أ) ٣ ب) ٥ جـ) ٧ د) −١

١٣) فلسطين : ٢٠١٩

إعداد المعلم : سائد الحلاق

إذا كان ص = س^{٣} + $\int$(٦س^{٢} + ٤).دس ، فإن $\frac{دص}{دس}$ =

أ) ٩س^{٢} + ٤ ب) س^{٣} + ٦س^{٢} + ٤ جـ) ٣س^{٢} + ١٢س د) ٣س^{٢} + ٢س^{٣} + ٤س + جـ

١٤) بيت لحم : ٢٠٢٠ تجريبي

$\int \frac{٥}{س^{٢}}$ دس =

أ) $\frac{٥}{س}$ + جـ ب) $\frac{-٥}{س}$ + جـ جـ) $\frac{١٥}{س^{٣}}$ + جـ د) $\frac{٥}{س^{٣}}$ + جـ

١٥) نابلس : ٢٠٢٠ تجريبي

إذا كان ص = $\int$(٢س^{٢} − ٣س).دس ، فإن $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ٢ تساوي:

أ) ٢ ب) ٥ جـ) صفر د) ٨

١٦ رام الله : ٢٠٢٠ تجريبي

جد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن ق′(س) = ٢س + ٥ ومنحناهُ يمر بنقطة الأصل.

أ ق(س) = ٢س^{٢} + ٥س
ب ق(س) = س^{٢} + ٥
جـ ق(س) = ٢س^{٢} + ٥
د ق(س) = س^{٢} + ٥س

١٧ قلقيلية : ٢٠٢٠ تجريبي

إذا كان ق(س) = ∫ س^{٢} + ٢س + جـ ، فما قيمة $\frac{\text{ق}'(٢)}{٢}$ ؟

أ ٤
ب ٢
جـ −٢
د ١

مدرسة ذكور ... الثانوية للبنين أ. سائد الحلاق مديرية غرب غزة

١٨ خانيونس : ٢٠٢٠ تجريبي

إذا كان ق(س) = ∫(٢س − ٣).ءس ، فإن ق′(٥) =

أ ٠
ب ١٠
جـ ٨
د ٧

١٩ فلسطين : ٢٠١٦

إذا كان منحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (١،٤) وكان ق′(س) = ٢س + ٥ ، فإن قاعدة الاقتران ق(س) هي:

أ ق(س) = س^{٢} + ٥س − ٢
ب ق(س) = س^{٢} + ٥س + ٢
جـ ق(س) = س^{٢} + ٥
د ق(س) = س^{٢} − س

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٢٠ فلسطين : ٢٠١٢

∫(س $\sqrt{\text{س}}$).ءس =

أ س$^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ
ب $\frac{٣}{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}}$ + جـ
جـ س $\sqrt{\text{س}}$ + جـ
د $\frac{٢}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ

٢١ فلسطين : ٢٠١٠ إكمال

أحد الاقترانات التالية يمثل اقتراناً أصلياً للمشتقة ق′(س) = ٣س^{٢} − ٤س

أ ق(س) = س^{٣} − ٢س^{٢}
ب ق(س) = ٦س − ٤
جـ ق(س) = ٣س^{٣} − ٢س^{٢}
د ق(س) = ٣س^{٢} − ٤س + جـ

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال		الجواب النهائي
١	احسب كلاً من التكاملات التالية:		
	أ) $\int \text{س}(\text{٣س}+\text{٢})\,\text{ءس}$	أ	$\text{س}^{\text{٣}}+\text{س}^{\text{٢}}+\text{جـ}$
	ب) $\int \text{س}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}\,\text{ءس}$	ب	$\frac{\text{٣}}{\text{٧}}\text{س}^{\frac{\text{٧}}{\text{٣}}}+\text{جـ}$
	جـ) $\int \left(\frac{\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}}-\text{٢س}^{-\text{٣}}\right)\text{ءس}$	ج	$\frac{-\text{٣}}{\text{س}}+\frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}+\text{جـ}$
	د) $\int \left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\sqrt{\text{س}}+\frac{\text{٥}}{\text{٣}}\text{س}^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}}\right)\text{ءس}$	د	$\frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{س}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}+\text{س}^{\frac{\text{٥}}{\text{٣}}}+\text{جـ}$
	هـ) $\int \left(-\text{٤س}^{-\text{٥}}+\text{٦س}^{\text{٢}}-\text{س}\right)\text{ءس}$	هـ	$\text{س}^{-\text{٤}}+\text{٢س}^{\text{٣}}-\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}}+\text{جـ}$
	و) $\int \left(\text{٧س}^{\frac{\text{٢}}{\text{٥}}}+\text{٥}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}}}+\text{١}\right)\text{ءس}$	و	$\text{٥س}^{\frac{\text{٧}}{\text{٥}}}+\text{٣س}^{\frac{\text{٥}}{\text{٣}}}+\text{س}+\text{جـ}$
	ز) $\int \frac{\text{س}^{\text{٣}}+\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}}\,\text{ءس}$	ز	$\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}}+\text{جـ}$
٢	إذا كان $\text{ق}(\text{س})=\int(\text{س}^{\text{٢}}+\text{٣س}-\text{٢})\,\text{ءس}$ ، فما قيمة $\text{ق}'(\text{١})$ ؟		٢
٣	إذا كان $\int \text{ق}'(\text{س})=\text{٣س}^{\text{٢}}+\text{س}+\text{٢}+\text{جـ}$ ، فما قيمة $\text{ق}'(-\text{٣})$ ؟		−١٧
٤	إذا كان $\text{ق}(\text{س})=\int(\text{٤س}^{\text{٢}}-\text{٢س}+\text{جـ})\,\text{ءس}$ ، وكان $\text{ق}'(-\text{١})=\text{٧}$ ، فما قيمة جـ ؟		١
٥	إذا كان $\text{ص}=\text{٣س}^{\text{٢}}+\int\frac{\text{س}^{\text{٢}}-\text{١}}{\text{س}-\text{١}}\,\text{ءس}$ ، فما قيمة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما س = ٢ ؟		١٥

إعداد المعلم: سائد الحلاق
مدرسة الشوكة الثانوية للبنين – أ. سائد الحلاق – مديرية غرب غزة

٦	أجد قاعدة الاقتران $ق(س)$ الذي مشتقتهُ $ق'(س) = ٦س^{٢} - ٢س$، علماً بأن $ق(٢) = -١$	$ق(س) = ٢س^{٣} - س^{٢} - ١٣$
٧	إذا كان $\int (س^{٤} + ق'(س)) ءس = س^{٣} + جـ$ ، فما قيمة $ق'(-١)$	٧
٨	إذا كان $\int ق'(س) ءس = س^{٣} + ٤ب س + جـ$ ، وكان $ق'(١) = ١٩$ ، ما قيمة ب ؟	٤
٩	إذا كان $ق'(س) = ٣س^{٢} + ٦س + جـ$ ، جد $\int ق(س) ءس$ ، علماً بأن $ق(١) = ٥$	$س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س + جـ$
١٠	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال جد $\int \left(\frac{٢}{س^{٢}} + \sqrt{س}\right) ءس$	$-\frac{٢}{س} + \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$
١١	فلسطين : ٢٠٢٠ جد $\int \left(٤س^{٣} - \frac{٢}{٥س^{٢}}\right) ءس$	$س^{٤} + \frac{٢}{٥س} + جـ$
١٢	فلسطين : ٢٠١٩ إكمال ديسمبر جد : $\int \left(\sqrt{س} + ٢س - \frac{٢}{س^{٤}}\right) ءس$	$\frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + س^{٢} + \frac{٢}{٣س^{٣}} + جـ$
١٣	شرق غزة: ٢٠٢٠ تجريبي جد : $\int \left(\frac{١}{س^{٢}} - س^{\frac{٣}{٢}}\right) ءس$	$-\frac{١}{س} - \frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} + جـ$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١٤	غرب غزة : ٢٠١٩ تجريبي ف١ جد : $\int \left(\sqrt{س} + \frac{٢}{٣س^{٢}}\right).ءس$	$\frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٣س} + جـ$
١٥	أريحا : ٢٠٢٠ تجريبي جد : $\int \left(س^{٢} + ٤س - ٣\right).ءس$	$\frac{س^{٣}}{٣} + ٢س^{٢} - ٣س + جـ$
١٦	نابلس : ٢٠٢٠جريبي أجد التكامل الآتي : $\int \left(\frac{٦}{س^{٣}} + \sqrt[٣]{س}\right).ءس$	$-٣س^{-٢} + \frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{س^{٤}} + جـ$
١٧	قباطية: ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان $\int ق'(س).ءس = أ\,س^{٢} + ب\,س + ٣$ ، جد قيمة الثابتين أ، ب علماً بأن : $ق'(١) = ٠$ ، $ق(١) = ١$	$أ = ٢$ $ب = -٤$
١٨	رام الله: ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان $\int ق'(س).ءس = ٢س^{٣} + ب\,س + جـ$ ، $ق'(٢) = ٢٦$ ، جد قيمة الثابتين جـ، ب علماً بأن : منحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (١، −١)	$ب = ٢$ $جـ = -٥$
١٩	رفح : ٢٠٢٠ تجريبي أجد قاعدة الاقتران ق(س) الذي مشتقته $ق'(س) = \sqrt{س}$ ، المار بالنقطة (١، ٠)	$ق(س) = \frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٣}} - \frac{٢}{٣}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

٢٠	رام الله : ٢٠٢٠ تجريبي جد $\int \left(\sqrt{س} + ٤س - \frac{١}{س^{٣}} \right) ءس$	$\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{٢} + \frac{١}{٢س^{٢}} + جـ$
٢١	فلسطين : ٢٠١٦ جد $\int \left(س^{\frac{٣}{٢}} \sqrt{س} \right) ءس$	$\frac{١}{٣} س^{٣} + جـ$
٢٢	فلسطين: ٢٠١٥ إكمال إذا كان $\int ق'(س) . ءس = س^{٤} - ٦س^{٢} + ٨$ ، فأوجد $ق'(٢)$	٨
٢٣	فلسطين: ٢٠١٤ إكمال جد $\int \left(س^{٣} + \frac{٦}{س^{٤}} \right) ءس$	$\frac{١}{٤} س^{٤} - \frac{٢}{س^{٣}} + جـ$
٢٤	فلسطين: ٢٠١٣ إذا كان $\int ق'(س) . ءس = ٢س^{٢} + ٢ب س + جـ$ ، وكان $ق'(٢) = ٢٦$ جد قيمة ب	$ب = ٩$
٢٥	فلسطين: ٢٠١٢ إكمال جد قاعدة الاقتران $ق(س)$ علماً بأن $ق'(س) = ٣ - ٢س$، وأن $ق(١) = ٤$	$-س^{٢} + ٣س + ٢$
٢٦	فلسطين : ٢٠١٠ أجد قاعدة الاقتران $ق(س)$ ، المار بالنقطة $(٤ ، ٠)$ علماً بأن $ق'(س) = \frac{١}{\sqrt{س}}$	$ق(س) = ٢\sqrt{س} - ٤$
٢٧	فلسطين : ٢٠١٠ إذا كان $\int ق'(س) . ءس = س^{٣} + ٢س + جـ$ ، جد $ق'(٢)$	١٤

مدرسة ذكور الشوكة الثانوية للبنين أ. سائد الحلاق مديرية غرب غزة
إعداد المعلم : سائد الحلاق

١ – ٦ التكامل المحدود

ملخص الدرس

أولاً — التكامل المحدود

يتميز التكامل المحدود عن التكامل غير المحدود بوجود حد علوي وحد سفلي ليتم حساب قيمتهُ.

تعريف

التكامل المحدود : إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ق}(\text{س})\Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ})$$

حيث أ : الحد الأدنى ، ب : الحد الأعلى ، ب ، أ $\in$ ح

ملاحـــظات هامة

١) تنطبق جميع قواعد التكامل غير المحدود على التكامل المحدود.

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٢) ثابت التكامل جـ لا يكتب في التكامل المحدود .

٣) مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر دائماً .

٤) تكامل العدد الثابت المحدود $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} (\text{جـ})\,\text{ءس} = \text{جـ}\,(\text{أ} - \text{ب})$: جـ ، أ ، ب أعداد حقيقية

$\int_{١}^{٣} (٤)\,\text{ءس}$ لهُ طريقتين هما :

١) $\int_{١}^{٣} (٤)\,\text{ءس} = ٤\text{س}\Big|_{١}^{٣} = ٤(٣ - ١) = ٤ \times ٢ = \boxed{٨}$

٢) $\int_{١}^{٣} (٤)\,\text{ءس} = ٤\text{س}\Big|_{١}^{٣} = (٤ \times ٣) - (٤ \times ١) = ١٢ - ٤ = \boxed{٨}$

أمثلة محلولة

مثال ١

احسب كلاً من التكاملات التالية:

١) $\int_{1}^{2} (2\text{س} - 1)\,\text{ء س}$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\text{س}^2 - \text{س}\Big|_{1}^{2} = (2^2 - 2) - (1^2 - 1) = 2 - 0 = \boxed{2}$$

٢) $\int_{-1}^{1} (3\text{س}^2 + 4)\,\text{ء س}$

$$\text{س}^3 + 4\text{س}\Big|_{-1}^{1} = (1^3 + 4\times 1) - (-1^3 + 4\times -1) = 5 - -5 = \boxed{10}$$

٣) $\int_{0}^{3} \left(\sqrt{\text{س}} \times \text{س}^{\frac{3}{2}}\right)\text{ء س}$

$$\int_{0}^{3} \left(\text{س}^{\frac{1}{2}} \times \text{س}^{\frac{3}{2}}\right)\text{ء س} = \int_{0}^{3} \left(\text{س}^{\frac{4}{2}}\right)\text{ء س} = \frac{\text{س}^3}{3}\Big|_{0}^{3} = \left(\frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{0}{3}\right) = \frac{27}{3} - 0 = \boxed{9}$$

٤) $\int_{1}^{4} \left(\frac{1}{4\sqrt{\text{س}}} + 6\text{س}^2\right)\text{ء س} = \int_{1}^{4} \left(\frac{\text{س}^{-\frac{1}{2}}}{4} + 6\text{س}^2\right)\text{ء س} = \frac{\text{س}^{\frac{1}{2}}}{4} \times 2 + \frac{6\text{س}^3}{3}\Big|_{1}^{4} = \frac{\sqrt{\text{س}}}{2} + 2\text{س}^3\Big|_{1}^{4}$

$$= \left(\frac{\sqrt{4}}{2} + 2\times 4^3\right) - \left(\frac{\sqrt{1}}{2} + 2\times 1^3\right) = \boxed{126\frac{1}{2}}$$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

مثال ٢

إذا كان $\text{ق}'(\text{س})$ مشتقة الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ ، أجد قيمة $\int_{-2}^{3} 4\text{ق}'(\text{س})\,\text{ء س}$ ، إذا علمت أن: $\text{ق}(3) = 6$ ، $\text{ق}(-2) = -4$

الحل

$\int_{-2}^{3} 4\text{ق}'(\text{س})\,\text{ء س}$

$$= 4\text{ق}(\text{س})\Big|_{-2}^{3} = 4\left(\text{ق}(3) - \text{ق}(-2)\right) = 4(6 - -4) = 4\times 10 = \boxed{40}$$

مثال ٣

إذا كان $ق'(س)$ مشتقة الاقتران $ق(س)$، وكان $\int_{-١}^{٣} ٢ق'(س).دس = ١٢$ ، وكان $ق(٣) = ٤$ ، ما قيمة $ق(-١)$؟

الحل

$$\int_{-١}^{٣} ٢ق'(س).دس = ١٢$$

$$\cancel{٢}\, ق(س) \Big|_{-١}^{٣} = \cancel{١٢}^{\,٦}$$

$$\left(ق(٣) - ق(-١)\right) = ٦$$

$$\left(٤ - ق(-١)\right) = ٦ \leftarrow -ق(-١) = ٦ - ٤ \leftarrow -ق(-١) = ٢ \leftarrow ق(-١) = \boxed{-٢}$$

مدرسة ... الثانوية للبنين أ. سائد الحلاق

مثال ٤

إذا كان $\int_{٢}^{٤} (٤س + ب).دس = ١٤$ ، فما قيمة الثابت ب؟

الحل

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$$\left(\frac{٤}{٢}س^{٢} + ب س\right)\Big|_{٢}^{٤} = ١٤$$

$$\left(٢(٤)^{٢} + ب \times ٤\right) - \left(٢(٢)^{٢} + ب \times ٢\right) = ١٤$$

$$(٣٢ + ٤ب) - (٨ + ٢ب) = ١٤ \leftarrow ٣٢ + ٤ب - ٨ - ٢ب = ١٤$$

$$٢٤ + ٢ب = ١٤ \leftarrow ٢ب = ١٤ - ٢٤ \leftarrow ٢ب = -١٠ \leftarrow ب = \boxed{-٥}$$

مثال ٥

إذا كان $ص = \int_{-٤}^{٥} (س^{٤} + ٤س - ٢).دس$ ، جد $\frac{دص}{دس}$

الحل

$$\frac{دص}{دس} = \text{صفر}$$

ثانياً خصائص التكامل المحدود

تكمن أهمية معرفة خصائص التكامل المحدود في أنـــها تساعدنا على حساب التكامل بشكل أسهل .

خـــــــاصية ١

$\int_{ب}^{ب} \text{ق}(س).ءس = \text{صفر}$ ، حيث ب عدد حقيقي

(إذا تساوى الحد الأعلى مع الحد الأدنى بالتكامل المحدود تكون قيمة التكامل صفر)

مثال

$\int_{٣}^{٣} (٥س) .ءس = \text{صفر}$

خـــــــاصية ٢

$\int_{أ}^{ب} \text{ق}(س).ءس = - \int_{ب}^{أ} \text{ق}(س).ءس$

(خاصية العكس)   حيث أ ، ب عدادان حقيقيان.

إعداد المعلم : سائد الحلاق

خـــــــاصية ٣

إذا كان ق(س) معرفاً على الفترة [أ،ب] حيث وكان جـ عدد حقيقي بحيث أ < ب < جـ ، فإن :

$\int_{أ}^{ب} \text{ق}(س).ءس = \int_{أ}^{جـ} \text{ق}(س).ءس + \int_{جـ}^{ب} \text{ق}(س).ءس$ وتسمى هذه الخاصية (خاصية الإضافة)

خـــــــاصية ٤

$\int_{أ}^{ب} (\text{جـ ق}(س)).ءس = \text{جـ} \int_{أ}^{ب} (\text{ق}(س)).ءس$: جـ ، أ، ب أعداد حقيقية

أمثلة محلولة

مثال ١

إذا كان $\int_{2}^{3} (ق(س)).دس = 8$ ، فما قيمة $\int_{3}^{2} (3ق(س)).دس$ ؟

الحل

$$\int_{3}^{2} (3ق(س)).دس = 3 \times -8 = \boxed{-24}$$

مثال ٢

إذا كان $\int_{1}^{3} (ق(س)).دس = -5$، ما قيمة $\int_{3}^{1} (3ق(س)+2س).دس$؟

الحل

$$\int_{3}^{1} (3ق(س)+2س).دس = \int_{3}^{1} 3ق(س) + \int_{3}^{1} 2س.دس$$

$$= 3\times 5 + \frac{2}{2}س^2 \Big|_{3}^{1} = 15 + (1^2 - 3^2) = 15 - 8 = \boxed{7}$$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

مثال ٣

إذا كان $\int_{-2}^{1} (3ق(س)).دس = 12$، ما قيمة $\int_{-2}^{1} 2(ق(س)+4س+1).دس$؟

الحل

$$\int_{-2}^{1} (\cancel{3}ق(س)).دس = \cancel{12}^{4} \Leftarrow \int_{-2}^{1} (ق(س)).دس = 4$$

$$\int_{-2}^{1} 2(ق(س)+4س+1).دس = 2\int_{-2}^{1} ق(س).دس + 2\int_{-2}^{1} 4س.دس + 2\int_{-2}^{1} 1.دس$$

$$2\times 4 + \cancel{2}\times\frac{4}{\cancel{2}}س^2\Big|_{-2}^{1} + 2س\Big|_{-2}^{1} = 8 + 4(1)^2 - 4(-2)^2 + 2(1 - -2)$$

$$= 8 + 4 - 16 + 2\times 3 = -4 + 6 = \boxed{2}$$

مثال ٤

إذا كان $\int_{-1}^{4} (ق(س)).دس = ١٢$، $\int_{4}^{-1} \left(\frac{1}{2}ق(س) + ج\right).دس = ٤$ ما قيمة الثابت ج؟

الحـــل

$$\int_{4}^{-1} \frac{1}{2}ق(س) + \int_{4}^{-1} ج.دس = ٤$$

$$= \frac{1}{2} \times -١٢ + جس \Big|_{4}^{-1} = ٤ \leftarrow -٦ + ج(-١-٤) = ٤$$

$$= -٦ + ج \times -٥ = ٤ \leftarrow -٦ + -٥ج = ٤ \leftarrow \frac{-٥}{-٥}ج = \frac{١٠}{-٥} \leftarrow ج = \boxed{-٢}$$

مثال ٥

إذا كان $\int_{3}^{5} \left(\frac{1}{2}ق(س)\right).دس = ٦$ ، $\int_{5}^{3} (٢هـ(س)).دس = -٦$ ، ما قيمة $\int_{3}^{5} (٤ق(س) + ٣هـ(س)).دس$؟

إعداد المعلم: سائد الحلاق

الحـــل

$$\int_{3}^{5} \left(\frac{1}{2}ق(س)\right).دس = ٦ \leftarrow \int_{3}^{5} (ق(س)).دس = ١٢$$ (نضرب الطرفين في العدد ٢)

$$\int_{5}^{3} (٢هـ(س)).دس = -٦ = \int_{5}^{3} (هـ(س)).دس = -٣$$ (نقسم الطرفين على العدد ٢)

$$\int_{3}^{5} (٤ق(س) + ٣هـ(س)).دس = \int_{3}^{5} (٤ق(س)).دس + \int_{3}^{5} (٣هـ(س)).دس$$

$$= (٤ \times ١٢) + (٣ \times ٣) = ٤٨ + ٩ = \boxed{٥٧}$$

مثال ٦

إذا كان $\int_{١}^{٢} \left(٣\text{ق}(\text{س})\right).\text{دس} = ١٥$ ، $\int_{١}^{٢} \left(-٤\text{هـ}(\text{س})\right).\text{دس} = ٢٠$ ، أوجد $\int_{١}^{٢} ٤\left(٢\text{ق}(\text{س}) + ٣\text{هـ}(\text{س}) - ٣\right).\text{دس}$

الحل

$٣\int_{١}^{٢} \left(\text{ق}(\text{س})\right).\text{دس} = ١٥ \leftarrow \int_{١}^{٢} \left(\text{ق}(\text{س})\right).\text{دس} = \boxed{٥}$ (نقسم الطرفين على العدد ٣)

$\int_{١}^{٢} \left(-٤\text{هـ}(\text{س})\right).\text{دس} = ٢٠ \leftarrow \int_{١}^{٢} \left(\text{هـ}(\text{س})\right).\text{دس} = \boxed{-٥}$ (نقسم الطرفين على العدد −٤)

$\int_{١}^{٢} ٤\left(٢\text{ق}(\text{س}) + ٣\text{هـ}(\text{س}) - ٣\right).\text{دس} = \int_{١}^{٢} ٤\left(٢\text{ق}(\text{س})\right).\text{دس} + \int_{١}^{٢} ٤\left(٣\text{هـ}(\text{س})\right).\text{دس} - \int_{١}^{٢} ٤(٣).\text{دس}$

$= (٤\times٢\times٥) + (٤\times٣\times٥) - \left(٤\times٣\text{س}\Big|_{١}^{٢}\right)$

$= ٤٠ + ٦٠ - ٤\left(٣(٢-١)\right) = ١٠٠ - ١٢ = \boxed{٨٨}$

مثال ٧

إذا كان $\text{هـ}'(\text{س})$ مشتقة الاقتران $\text{هـ}(\text{س})$ ، وكان : $\int_{٣}^{٢} \left(-٣\text{ق}(\text{س})\right).\text{دس} = ٦$ ، $\text{هـ}(٢) = ٤$ ، $٢\text{هـ}(٣) = -٦$ ،

، أوجد قيمة المقدار : $\int_{٢}^{٣} \left(\text{هـ}'(\text{س}) + ٥\text{ق}(\text{س}) + ٤\text{س}\right).\text{دس}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الحل

$-٣\int_{٣}^{٢} \left(\text{ق}(\text{س})\right).\text{دس} = ٦ \leftarrow \int_{٣}^{٢} \left(\text{ق}(\text{س})\right).\text{دس} = \boxed{-٢}$ (نقسم الطرفين على العدد −٣)

$\frac{٢}{٢}\text{هـ}(٣) = \frac{-٦}{٢} \leftarrow \text{هـ}(٣) = -٣$ (تجهيز)

$\int_{٢}^{٣} \left(\text{هـ}'(\text{س}) + ٥\text{ق}(\text{س}) + ٤\text{س}\right).\text{دس} = \int_{٢}^{٣} \left(\text{هـ}'(\text{س})\right).\text{دس} + \int_{٢}^{٣} \left(٥\text{ق}(\text{س})\right).\text{دس} + \int_{٢}^{٣} (٤\text{س}).\text{دس}$

$= \text{هـ}(\text{س})\Big|_{٢}^{٣} + ٥\int_{٢}^{٣} \left(\text{ق}(\text{س})\right).\text{دس} + \left(\frac{٤}{٢}\text{س}^{٢}\right)\Big|_{٢}^{٣}$

$= \left(\text{هـ}(٣) - \text{هـ}(٢)\right) + (٥\times٢) + \left(٢(٣)^{٢} - ٢(٢)^{٢}\right) = (-٣-٤) + ١٠ + (١٨-٨) = -٧ + ١٠ + ١٠ = \boxed{١٣}$


مثال ٨

إذا كان $\text{هـ}'(\text{س})$ مشتقة الاقتران $\text{هـ}(\text{س})$ ، وكان : $\text{هـ}(-١) = -٤$ ، $\text{هـ}(٢) = ٥$ ، أوجد قيمة المقدار:

$$\int_{-١}^{٢} \left(\text{هـ}'(\text{س}) + ٢\text{س} - ١\right) \text{دس}$$

الحل

$$\int_{-١}^{٢} \left(\text{هـ}'(\text{س}) + ٢\text{س} - ١\right)\text{دس} = \int_{-١}^{٢} \left(\text{هـ}'(\text{س})\right)\text{دس} + \int_{-١}^{٢} (٢\text{س})\text{دس} - \int_{-١}^{٢} (١)\text{دس}$$

$$= \text{هـ}(\text{س}) \Big|_{-١}^{٢} + \frac{٢}{٢}\text{س}^{٢} \Big|_{-١}^{٢} - \text{س} \Big|_{-١}^{٢}$$

$$= \text{هـ}(٢) - \text{هـ}(-١) + (٢^{٢}) - ((-١)^{٢}) - (٢ - -١)$$

$$= ٥ - -٤ + ٤ - ١ - ٣ = \boxed{٩}$$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

مثال ٩

إذا كان $\int_{-٢}^{١} (\text{ق}(\text{س}))\text{دس} = ٨$ ، $\int_{١}^{٣} (\text{ق}(\text{س}))\text{دس} = -٤$ ، ما قيمة $\int_{-٢}^{٣} (٢\text{ق}(\text{س}))\text{دس}$ ؟

الحل

$$\int_{-٢}^{٣} (٢\text{ق}(\text{س}))\text{دس} = ٢\int_{-٢}^{١} (\text{ق}(\text{س}))\text{دس} + ٢\int_{١}^{٣} (\text{ق}(\text{س}))\text{دس} = (٢ \times ٨) + (٢ \times -٤) = ١٦ + -٨ = \boxed{٨}$$

مثال ١٠

إذا كان $\int_{-٣}^{٢} (\text{ق}(\text{س}))\text{دس} = -٣$ ، $\int_{٤}^{٢} (\text{ق}(\text{س}))\text{دس} = -٥$ ، ما قيمة $\int_{-٣}^{٤} (\text{ق}(\text{س}) + ٢)\text{دس}$ ؟

الحل

$$\int_{-٣}^{٤} (\text{ق}(\text{س}) + ٢)\text{دس} = \int_{-٣}^{٢} (\text{ق}(\text{س}))\text{دس} + \int_{٢}^{٤} (\text{ق}(\text{س}))\text{دس} + \int_{-٣}^{٤} (٢)\text{دس}$$

$$= -٣ + ٥ + (٢\text{س}) \Big|_{-٣}^{٤}$$

$$= ٢ + ((٢ \times ٤) - (٢ \times -٣)) = ٢ + (٨ + ٦) = \boxed{١٦}$$

مثال ١١

إذا كان $\int_{2}^{1}\left(\frac{1}{2}\text{ق}(\text{س})\right)\text{ء س}=3$ ، $\int_{2}^{4}\left(-5\text{ق}(\text{س})\right)\text{ء س}=5$ ، أوجد قيمة $\int_{1}^{4}\left(2\text{ق}(\text{س})+3\sqrt{\text{س}}\right)$

الحل

$$\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\int_{2}^{1}\text{ق}(\text{س})\,\text{ء س}=2\times 3 \leftarrow \int_{2}^{1}\text{ق}(\text{س})\,\text{ء س}=\boxed{6}$$

$$\cancel{-5}\int_{2}^{4}\text{ق}(\text{س})\,\text{ء س}=\cancel{5}^{-1} \leftarrow \int_{2}^{4}\text{ق}(\text{س})\,\text{ء س}=\boxed{-1}$$

$$\int_{1}^{4}\left(2\text{ق}(\text{س})+3\sqrt{\text{س}}\right)=2\left(\int_{1}^{2}\text{ق}(\text{س})\,\text{ء س}+\int_{2}^{4}\text{ق}(\text{س})\,\text{ء س}\right)+\int_{1}^{4}\left(3\text{س}^{\frac{1}{2}}\right)\text{ء س}$$

$$=2(-6+-1)+\frac{2}{\cancel{3}}\times\cancel{3}\,\text{س}^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{4} \quad = (2\times-7)+2\sqrt{\text{س}^{3}}\Big|_{1}^{4}$$

$$=-14+2\left(\sqrt{4^{3}}-\sqrt{1^{3}}\right)=-14+2(8-1)=-14+2\times 7=-14+14=\boxed{0}$$

مثال ١٣

إذا كان $\int_{1}^{4}\left(\text{ق}(\text{س})\right)\text{ء س}=-3$ ، $\int_{5}^{4}\left(\text{ق}(\text{س})\right)\text{ء س}=4$ ، أوجد قيمة الثابت ب إذا علمت أن :

$$\int_{1}^{5}\left(\text{ق}(\text{س})+(\text{ب})\right)\text{ء س}=17$$

الحل

$$\int_{1}^{4}\text{ق}(\text{س})\,\text{ء س}+\int_{4}^{5}\text{ق}(\text{س})\,\text{ء س}+\int_{1}^{5}(\text{ب})\,\text{ء س}=17$$

$$-3+-4+\text{ب س}\Big|_{1}^{5}=17$$

$$\left(-7+\text{ب}(5-1)\right)=17$$

$$-7+4\text{ب}=17$$

$$\frac{4}{4}\text{ب}=\frac{24}{4} \leftarrow \text{ب}=\boxed{6}$$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

مثال ١٤

إذا كان $\int (٣س + ق(س)).دس = ٣س^{٢} + ٥س + ٤$ ، فما قيمة $\int_{٠}^{١} (٢ق(س)).دس$ ؟

الحـــل

$$\int (٣س).دس + \int ق(س)دس = ٣س^{٢} + ٥س + ٤$$

$$\int ق(س)دس = ٣س^{٢} + ٥س + ٤ - \int (٣س).دس$$

$$\int ق(س)دس = ٣س^{٢} + ٥س + ٤ - \frac{٣}{٢}س^{٢} + جـ$$

$$\boxed{\int ق(س)دس = \frac{٣}{٢}س^{٢} + ٥س + ٤ + جـ}$$

$$\int_{٠}^{١} (٢ق(س)).دس = ٢\left(\frac{٣}{٢}س^{٢} + ٥س + ٤ + جـ\right)\Big|_{٠}^{١}$$

$$= (٣س^{٢} + ١٠س + ٨ + ٢جـ)\Big|_{٠}^{١}$$

$$= \left((٣(١)^{٢} + ١٠ \times ١ + ٨ + ٢جـ) - (٣(٠)^{٢} + ١٠ \times ٠ + ٨ + ٢جـ)\right)$$

$$= \left((٣ + ١٠ + ٨ + ٢جـ) - (٨ + ٢جـ)\right)$$

$$= ٢١ + ٢جـ - ٨ - ٢جـ = \boxed{١٣}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

حل آخر :

$$\int (٣س + ق(س)).دس = ٣س^{٢} + ٥س + ٤$$ (نشتق الطرفين)

$$٣س + ق(س) = ٦س + ٥$$

$$ق(س) = ٦س + ٥ - ٣س$$

$$ق(س) = ٣س + ٥$$

$$\therefore \int_{٠}^{١} (٢ق(س)).دس = \int_{٠}^{١} ٢(٣س + ٥).دس$$

$$= \cancel{٢} \times \frac{٣}{\cancel{٢}}س^{٢} + ٢ \times ٥س \Big|_{٠}^{١} = ٣س^{٢} + ١٠س \Big|_{٠}^{١}$$

$$٣(١)^{٢} + ١٠ \times ١ - ٠ = ٣ + ١٠ = \boxed{١٣}$$

مثال ١٥

إذا كان : $\int_{-1}^{-2}(\text{ق}(\text{س}))\,\text{د}\text{س} = -2$ ، $\int_{-1}^{2}(\text{ق}(\text{س})+1)\,\text{د}\text{س} = 4$ ، أوجد $\int_{-2}^{2}\text{ق}(\text{س})\,\text{د}\text{س}$

الحـــل

$$\int_{-1}^{2}(\text{ق}(\text{س})+1)\,\text{د}\text{س} = \int_{-1}^{2}(\text{ق}(\text{س}))\,\text{د}\text{س} + \int_{-1}^{2}(1)\,\text{د}\text{س}$$

$$4 = \int_{-1}^{2}(\text{ق}(\text{س}))\,\text{د}\text{س} + \text{س}\Big|_{-1}^{2}$$

$$4 = \int_{-1}^{2}(\text{ق}(\text{س}))\,\text{د}\text{س} + (2 - -1) \leftarrow \int_{-1}^{2}(\text{ق}(\text{س}))\,\text{د}\text{س} = 4 - 3 = \boxed{1}$$

$$\int_{-2}^{2}\text{ق}(\text{س})\,\text{د}\text{س} = \int_{-2}^{-1}\text{ق}(\text{س})\,\text{د}\text{س} + \int_{-1}^{2}\text{ق}(\text{س})\,\text{د}\text{س} = 2 + 1 = \boxed{3}$$

مثال ١٦

إذا كان $\int_{\text{ب}}^{1}(2\text{س} - 4\text{ب})\,\text{د}\text{س} = \int_{0}^{1}(5\text{ب}+1)\,\text{د}\text{س}$ ما قيمة / قيم الثابت ب ؟

الحـــل

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$$\int_{\text{ب}}^{1}(2\text{س} - 4\text{ب})\,\text{د}\text{س} = \int_{0}^{1}(5\text{ب}+1)\,\text{د}\text{س}$$

$$\frac{2}{2}\text{س}^2 - 4\text{ب}\text{س}\Big|_{\text{ب}}^{1} = 5\text{ب}\text{س} + \text{س}\Big|_{0}^{1}$$

$$(1^2 - 4\text{ب}\times 1) - (\text{ب}^2 - 4\text{ب}\times\text{ب}) = (5\text{ب}\times 1 + 1) - (5\text{ب}\times 0 + 0)$$

$$(1 - 4\text{ب}) - (\text{ب}^2 - 4\text{ب}^2) = (5\text{ب}+1) - (0+0)$$

$$1 - 4\text{ب} - \text{ب}^2 + 4\text{ب}^2 = 5\text{ب} + 1$$

$$1 - 4\text{ب} + 3\text{ب}^2 - 5\text{ب} - 1 = 0$$

$$3\text{ب}^2 - 9\text{ب} = 0$$

$$3\text{ب}(\text{ب} - 3) = 0$$

إما $3\text{ب} = 0 \leftarrow \boxed{\text{ب} = 0}$ أو $\text{ب} - 3 = 0 \leftarrow \boxed{\text{ب} = 3}$

التكامل المحدود (١-٥) | حلول الكتاب الوزاري صفحة ٣٧

١) أ

$$\int_{-٢}^{١}(٣\text{س}+١)\,\text{ءس} = ٤ + \left(\frac{٣\text{س}^{٢}}{٢}+\text{س}\right)\Big|_{-٢}^{١} = \left(\frac{٣(١)^{٢}}{٢}+١\right)-\left(\frac{٣(-٢)^{٢}}{٢}+(-٢)\right) = \boxed{-\frac{٣}{٢}}$$

ب

$$\int_{٢}^{٥}(٧-٢\text{س})\,\text{ءس} = \left(٧\text{س}-\text{س}^{٢}\right)\Big|_{٢}^{٥} = \left(٧\times٥-٥^{٢}\right)-\left(٧\times٢-٢^{٢}\right)$$

$$= (٣٥-٢٥) - (١٤-٤) = ١٠-١٠ = \boxed{٠}$$

جـ

$$\int_{١}^{٤}\left(\sqrt{\text{س}}+٣\right)\text{ءس} = \int_{١}^{٤}\left(\text{س}^{\frac{١}{٢}}+٣\right)\text{ءس} = \left(\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}+٣\text{س}\right)\Big|_{١}^{٤} = \left(\frac{٢\sqrt{\text{س}}^{\,٣}}{٣}+٣\text{س}\right)\Big|_{١}^{٤}$$

$$= \left(\frac{٢\sqrt{٤}^{\,٣}}{٣}+٣\times٤\right)-\left(\frac{٢\sqrt{١}^{\,٣}}{٣}+٣\times١\right) = \left(\frac{١٦}{٣}+١٢\right)-\left(\frac{٢}{٣}+٣\right) = \boxed{\frac{٤١}{٣}}$$

٢)

$$\int_{-٢}^{٢}٢\text{ع}(\text{س}).\text{ءس} = ٢\int_{-٢}^{٢}\text{ع}(\text{س}).\text{ءس} = ٢\left[\left(٣\text{س}^{٢}-٢\text{س}\right)\Big|_{-٢}^{٢}\right]$$

$$= ٢\left[\left(٣(٢)^{٢}-٢(٢)\right)-\left(٣(-٢)^{٢}-٢(-٢)\right)\right] = ٢\left[(٨)-(١٦)\right] = ٢\times-٨ = -١٦$$

٣)

$$\int_{١}^{٥}\cancel{٣}\text{هـ}(\text{س})\text{ءس} = \cancel{١٢}^{\,٤} \leftarrow \int_{١}^{٥}\text{هـ}(\text{س})\text{ءس} = ٤$$

$$\int_{٥}^{١}\left(\text{هـ}(\text{س})+٢\text{س}-١\right)\text{ءس} = \int_{٥}^{١}\text{هـ}(\text{س})\text{ءس} + \int_{٥}^{١}(٢\text{س}-١)\text{ءس} = -٤+\left(\text{س}^{٢}-\text{س}\right)\Big|_{٥}^{١}$$

$$= -٤+\left[\left(١^{٢}-١\right)-\left(٥^{٢}-٥\right)\right] == -٤+٠-٢٠ = \boxed{-٢٤}$$

٤)

$$\int_{٣}^{٥}(٢\text{س}+\text{ب})\text{ءس} = ١٢ \leftarrow \left(\text{س}^{٢}+\text{ب}\text{س}\right)\Big|_{٣}^{٥} = ١٢$$

$$(٢٥+٥\text{ب})-(٩+٣\text{ب}) = ١٢$$

$$١٦+٢\text{ب} = ١٢ \leftarrow ٢\text{ب} = ١٢-١٦$$

$$\frac{٢}{٢}\text{ب} = \frac{-٤}{٢} \leftarrow \text{ب} = \boxed{-٢}$$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

٥

$$\int_{-١}^{\text{ج}} ٦\text{س}\,\text{دس} = ٠ \leftarrow \left(٣\text{س}^{٢}\right)\Big|_{-١}^{\text{ج}} = ٠$$

$$٣\text{ج}^{٢} - ٣ = ٠$$

$$\frac{\cancel{٣}}{\cancel{٣}}\,\text{ج}^{٢} = \frac{\cancel{٣}}{\cancel{٣}}\,^{١}$$

$\text{ج}^{٢} = ١$ (أخذ الجذر التربيعي للطرفين)

$$\leftarrow \text{ج} = \boxed{\pm ١}$$

٦

$$\int_{-١}^{٥} \left(٢\text{ق}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})\right).\text{دس}$$

$$= ٢\int_{-١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{-١}^{٥} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$= ٢ \times ١٣ - (-٧)$$

$$= ٢٦ + ٧ = \boxed{٣٣}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٧

$$\int_{٣}^{٧} \cancel{٣}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \cancel{٩}^{-٣} \leftarrow \int_{٣}^{٧} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -٣$$

$$\int_{٢}^{٣} ٤\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$= ٤\int_{٢}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٤\left[\int_{٢}^{٧} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٧}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}\right]$$

$$= ٤ \times (٣ + ٣)$$

$$= ٤ \times ٦ = \boxed{٢٤}$$

ورقة عمل ٦ – ١ | التكامل المحدود

أولاً: إختر الإجابة الصحيحة

١) $\int_{٥}^{٥} (٢س + \sqrt[٣]{٢٧})\,.دس =$

أ) س^{٢} + ٣س + جـ ب) ٢س + ٣ + جـ جـ) ٢س + ٣ د) صفر

٢) اذا كان ق(س) = $\int_{٢}^{٦} (س^{٤} + ٣س^{٢} + ٥)\,.دس$ ، فما قيمة ق$'$(−٣) ؟

أ) س^{٤} + ٣س^{٢} + ٥ ب) ٤س^{٣} + ٦س جـ) ١٠ د) صفر

٣) اذا كان ق(س) = ٢س^{٢} − $\int_{٢}^{٦} (س^{٤} + ٣س^{٢} + ٥)\,.دس$ ، فما قيمة ق$'$(−٤) ؟

أ) −١٦ ب) ٨ جـ) ١٦ د) صفر

٤) اذا كان ق(س) = س^{٢} + $\int (٢س)\,.دس$ + $\int_{١}^{٢} (س^{٤} + ٣س^{٢} + ٥)\,.دس$ ، فما ق$'$(س) ؟

أ) س^{٢} + ٢س ب) ٤س جـ) س^{٢} د) ٢س

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٥) إذا كان ق$'$(س) مشتقة ق(س) وكان: ق(−٢) = ٤ ، ق(٣) = −٣ ، فما قيمة $\int_{-٢}^{٣} (٤ق'(س))\,.دس$ ؟

أ) ١٤ ب) −٧ جـ) −٢٨ د) −١٤

٦) إذا كان ق(٦) = ٣ ق(٣) ، وكان $\int_{٣}^{٦} (ق'(س))\,.دس = ١٦$ ، فما قيمة ق(٣) ؟

أ) ٨ ب) ١٦ جـ) −١٦ د) −٨

٧) ما قيمة : $\int_{٠}^{١} (\frac{٣}{٢}\sqrt{س})\,.دس$ ؟

أ) ٠ ب) $\frac{٣}{٢}$ جـ) ١ د) −١

٨) $\int_{١}^{٤} (٦\sqrt{س})\,.دس =$ ....

أ) ٢٨ ب) ٣ جـ) ١٢ د) ٤

(٩) إذا كان $\int_{٢}^{٣} (-٢ه(س)) . دس = -٨$ ، فما قيمة $\int_{٣}^{٢} (ه(س)+٢) . دس$؟

أ) -٦   ب) ٦   ج) ٩   د) -٩

(١٠) إذا كان $\int_{١}^{-٢} (ه(س)) . دس = ٤$ ، $\int_{١}^{٣} (ه(س)) . دس = -٤$ ما قيمة $\int_{-٢}^{٣} (٤ه(س)) . دس$؟

أ) ٠   ب) -٨   ج) ٣٢   د) -٣٢

(١١) إذا كان $\int_{٧}^{ج} (ج) . دس = ٨$ ، فما قيمة / قيم الثابت ج ؟

أ) ٨ ، ١   ب) -٨ ، ١   ج) ٨ ، -١   د) -٨ ، -١

(١٢) فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

ما قيمة $\int_{-١}^{٢} ه'(س) دس$ ، علماً بأن ه(٢) = ٧ ، ه'(-١) = ٢ ، ه'(٢) = ٣ ، ه(-١) = ١ ؟

أ) ٤   ب) ٢   ج) ٦   د) ٩

(١٣) فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كان $\int_{٢}^{٣} (ه(س)) دس = ٨$ ، فما قيمة $\int_{٢}^{٣} (٢ه(س)+٥) دس$ ؟

أ) -١١   ب) ٢١   ج) ١٣   د) -٣

(١٤) فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان $\int_{٢}^{ب} ٤س . دس = ٢٤$ ، فما قيمة/قيم الثابت ب ؟

أ) -٤ ، -٢   ب) ٤ ، -١   ج) -٤ ، ٤   د) -٤ ، ١

(١٥) فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان $\int_{٥}^{٧} (٣ه(س)) دس = ١٥$ ، فما قيمة $\int_{٧}^{٥} (ه(س)) دس$ ؟

أ) ١٥   ب) ٥   ج) -٥   د) -١٥

١٦ فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان $\int_{-١}^{٣} (٣س^{٢} + ب).ءس = ١٦$ ، فما قيمة الثابت ب ؟

أ	ب	ج	د
-٣	٣	٦	-٦

١٧ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال ديسمبر

إذا كان $ص = ٢س^{٣} + \int_{-١}^{١} (٥س).ءس$ ، فما قيمة $\frac{ءص}{ءس}$ ؟

أ	ب	ج	د
$٦س^{٢}$	$٦س^{٢} + ٥س$	$٦س^{٢} + ١٠$	$٦س^{٢} + ٥$

١٨ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال ديسمبر

ما قيمة $\int_{٢}^{٨} (هـ(س)).ءس + \int_{٨}^{٢} (هـ(س) - ٣).ءس$ ؟

أ	ب	ج	د
١٨	-٣	-١٨	٣

١٩ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال ديسمبر

إذا كان $\int_{٢}^{٧} (ع(س)).ءس = ٣$ ، $\int_{٣}^{٧} (٢ع(س)).ءس = -٦$ ما قيمة $\int_{٢}^{٣} (٢ع(س)).ءس$ ؟

إعداد المعلم : سائد الحلاق

أ	ب	ج	د
١٢	٤٨	٢٤	٦

٢٠ فلسطين : ٢٠١٩

إذا كان $\int_{١}^{٤} (٢ع(س))ءس = ١٠$ ، فما قيمة $\int_{٤}^{١} \left(\frac{١}{٢}ع(س)\right)ءس$ ؟

أ	ب	ج	د
$\frac{٥}{٢}$	-٥	-١٠	$-\frac{٥}{٢}$

٢١ فلسطين : ٢٠١٩

إذا كان $ع(٧) = ٨$ ، $ع(٥) = -٢$ ، فما قيمة $\int_{٥}^{٧} (٢ع'(س)).ءس$ ، فما قيمة $ع(٣)$ ؟

أ	ب	ج	د
-١٠	١٠	٢٠	-٢٠

(٢٢) فلسطين : ٢٠١٩

إذا كان $\int_{-١}^{٥} (٣ق(س))\,ءس = ٦$ ، فما قيمة $\int_{-١}^{٥} (٢ - ق(س))\,ءس$ ؟

أ ١٠   ب ٦٠   جـ ٠   د ١٢

(٢٣) قباطية : ٢٠٢٠ تجريبي

إذا كان $ق(س) = \frac{س+١}{س^٢}$ ، فإن $\int_{-١}^{١} \left(ق'(س)\right)\,ءس$ ؟

أ -١ ب -٢ جـ ٢   د ٠

(٢٤) نابلس : ٢٠٢٠ تجريبي

إذا كان $\int_{٢}^{٤} (٣ق(س)).ءس = ٦$ ، $\int_{٧}^{٤} (ق(س)).ءس = ٥$ ما قيمة $\int_{٢}^{٧} (٢ق(س)).ءس$ ؟

أ -١ ب ١١   جـ -٣ د ١

(٢٥) بيت لحم : ٢٠٢٠ تجريبي

إذا كان $\int_{٠}^{ب} (٢س - ١).ءس = ٢$ ، فما قيمة/قيم الثابت ب؟

إعداد المعلم : سائد الحلاق

أ ٢،١   ب -٢،١   جـ ٢،-١ د -٢ ، -١

(٢٦) رام الله : ٢٠٢٠ تجريبي

إذا كان $\int_{-ب}^{ب} (ب).ءس = ٣٢$ ، فما قيمة ب الموجبة؟

أ ٤   ب ٨   جـ ١٦   د ٣٢

(٢٧) الوسطى : ٢٠٢٠ تجريبي

إذا كان $\int_{٠}^{١} ٢ب س.ءس = ٨$ ، فما قيمة الثابت ب ؟

أ ٢   ب ٠   جـ ٤   د ٨

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال		الجواب النهائي
١	احسب قيمة كلاً من التكاملات التالية:		
	أ) $\int_{٠}^{٣} \left(س^{\frac{١}{٢}} \sqrt{س^{٣}}\right) \text{.ءس}$	أ	٩
	ب) $\int_{١}^{٤} \left(٥س\sqrt{س}\right) \text{.ءس}$	ب	٦٢
	جـ) $\int_{-١}^{١} \sqrt{س}\left(\sqrt{س} + \frac{٢}{\sqrt{س}}\right) \text{.ءس}$	ج	٤
	د) $\int_{٠}^{١} \left(\sqrt[٣]{س} + ٧\right) \text{.ءس}$	د	$\frac{٣١}{٤}$
٢	إذا كان $\int_{٣}^{٥} \left(ق(س)\right) \text{.ءس} = ١٠$ ، $\int_{٥}^{٣} \left(\frac{١}{٢}هـ(س)\right) \text{.ءس} = -٢$ ، فما قيمة $\int_{٣}^{٥} \left(٢ق(س) + هـ(س)\right) \text{.ءس}$؟		٢٨
٣	إذا كان $\int_{١}^{-٢} \left(ق(س)\right) \text{.ءس} = ٤$ ، $\int_{١}^{٣} \left(٢ق(س)\right) \text{.ءس} = -٤$ ما قيمة $\int_{-٢}^{٣} \left(٣ق(س)\right) \text{.ءس}$؟		−١٨
٤	إذا كان $\int_{-٣}^{-٢} \left(ق(س)\right) \text{.ءس} = -٣$ ، $\int_{-٢}^{٣} \left(ق(س)\right) \text{.ءس} = -١$ ما قيمة $\int_{-٣}^{٣} \left(\frac{١}{٢}ق(س)\right) \text{.ءس}$؟		−٢
٥	إذا كان : $\int_{٢}^{٤} (٢س+جـ) \text{.ءس} = ١٦$ ، فما قيمة الثابت جـ ؟		٢
٦	إذا كان : $\int_{جـ}^{٢} (٢س+٥) \text{.ءس} = ٢٠$ ، فما قيمة / قيم الثابت جـ ؟		−٢ ، ٣
٧	إذا كان : $\int_{٣}^{ب} (٢س-١) \text{.ءس} = \int_{١}^{٣} (-٣ب) \text{.ءس}$ ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟		−٦ ، ١

مدرسة الشفوى الثانوية للبنين – أ. سائد الحلاق
إعداد المعلم: سائد الحلاق

٨	إذا كان : $\int_{٢}^{٤} (٤\text{س} + \text{ب}) . \text{ءس} = ١٤$ ، فما قيمة الثابت ب ؟	−٥
٩	إذا كان : $\int_{٠}^{\text{ب}} (\text{س} + \text{ب}) . \text{ءس} = \int_{٠}^{٣} (\text{ب}) . \text{ءس}$ ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟	٢،٠
١٠	إذا كان $\int_{١}^{٢} (٢\text{ق}(\text{س})) . \text{ءس} = -٦$ ، $\int_{٢}^{٣} (٤\text{ق}(\text{س})) . \text{ءس} = -٨$ ، أوجد $\int_{١}^{٣} (٤\text{ق}(\text{س})) . \text{ءس}$	−٢٠
١١	إذا كان $\int_{-٢}^{٣} \left(\frac{١}{٢}\text{ق}(\text{س})\right) . \text{ءس} = ٤$ ، $\int_{٣}^{٤} (-٢\text{ق}(\text{س})) . \text{ءس} = ١٠$ ، أوجد $\int_{-٢}^{٤} (٢\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س}) . \text{ءس}$	١٨
١٢	إذا كان $\int_{١}^{٣} (٢\text{ق}(\text{س})) . \text{ءس} = ١٤$ ، $\int_{٣}^{١} (٤\text{هـ}(\text{س})) . \text{ءس} = -١٦$ ، أوجد $\int_{٣}^{١} ٣(٢\text{ق}(\text{س}) - ٥\text{هـ}(\text{س}) + ٢) . \text{ءس}$	٦
١٣	إذا كان $\int_{٣}^{٢} (-٢\text{ق}(\text{س})) . \text{ءس} = ٦$ ، أوجد $\int_{٣}^{٢} \left(٢\text{هـ}'(\text{س}) + ٥\text{ق}(\text{س}) + ١\right) . \text{ءس}$ علماً بأن : $\text{هـ}(٢) = ٤$ ، $٢\text{هـ}(٣) = -٧$	١
١٤	إذا كان : $\int_{٢}^{١} (٢\text{ق}(\text{س})) . \text{ءس} = -٦$ ، $\int_{٢}^{٣} (\text{ق}(\text{س}) + ٢) . \text{ءس} = -٨$ ، أوجد $\int_{١}^{٣} ٣(\text{ق}(\text{س}) + ١) . \text{ءس}$	−١٥
١٥	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال إذا كان $\int_{٥}^{٧} ٢\text{ق}(\text{س}) . \text{ءس} = ٦$ ، وكان $\int_{١}^{٧} (٣\text{ق}(\text{س}) + ٢) . \text{ءس} = ٢٤$ ، جد $\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س}) . \text{ءس}$	١

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١٦	فلسطين : ٢٠٢٠ إذا كان $\int_{-1}^{5} (\text{ق}(\text{س}))\,\text{ء}\text{س} = ٣$ ، وكان $\int_{٢}^{٥} (\text{ق}(\text{س})+٢)\,\text{ء}\text{س} = ١٣$ ، جد $\int_{٢}^{-١} (٤\text{ق}(\text{س}))\,\text{ء}\text{س}$	١٦
١٧	فلسطين : ٢٠٢٠ إذا كان $\int_{١}^{٣} (\text{ق}(\text{س})-٢)\,\text{ء}\text{س} = \int_{٣}^{١} (\text{ب}\text{س} - \text{ق}(\text{س}))\,\text{ء}\text{س}$ ، فما قيمة الثابت ب؟	١
١٨	نابلس : ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان $\int_{١}^{٥} (٣\text{ق}(\text{س})+٢)\,\text{ء}\text{س} = ١٤$ ، $\int_{٨}^{٥} (\text{ق}(\text{س}))\,\text{ء}\text{س} = ٥$ ، فأوجد $\int_{١}^{٨} (\text{ق}(\text{س})+٢\text{س})\,\text{ء}\text{س}$.	٦٠
١٩	بيت لحم: ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان $\int_{١}^{٥} (\text{ق}(\text{س}))\,\text{ء}\text{س} = ٧$ ، $\int_{٣}^{٥} (٣\text{ق}(\text{س}))\,\text{ء}\text{س} = -١٢$ ، فأوجد $\int_{١}^{٣} (\text{ق}(\text{س})-٢\text{س})\,\text{ء}\text{س}$.	٥
٢٠	غرب غزة: ٢٠٢٠ تجريبي أجد قيمة : $\int_{-٢}^{١} (\text{س}+٣)^{٢}\,\text{ء}\text{س}$	٢١
٢١	القدس الشريف : ٢٠٢٠ تجريبي كان $\int_{٢}^{٣} (٢\text{ق}(\text{س}))\,\text{ء}\text{س} = ٦$ فأوجد $\int_{٣}^{٢} \left(٢\text{هـ}'(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})\right)\,\text{ء}\text{س}$. علماً أن : هـ(٢) = ٣ ، ٢هـ(٣) = ٨	١

مدرسة التقوى الثانوية للبنين – أ. سائد الحلاق – مديرية غرب غزة
إعداد المعلم : سائد الحلاق

الرقم	السؤال	الإجابة
٢٢	القدس الشريف: ٢٠٢٠ تجريبي أجد قيمة التكامل الآتي : $\int_{-1}^{1}\left(٣س^{٢} - \frac{٤}{\sqrt[٣]{س^{٢}}} + \frac{٢}{س^{٢}}\right).ءس$	-٢٦
٢٣	فلسطين: ٢٠١٩ إكمال ديسمبر أجد قيمة التكامل الآتي : $\int_{٠}^{٢}\left(٤س^{٢} + ٨س\right).ءس$	$٢٦\frac{٢}{٣}$
٢٤	فلسطين : ٢٠١٩ إكمال أغسطس إذا كان $\int_{-1}^{1} ق(س).ءس = ١٣$ ، $\int_{1}^{-1} هـ(س).ءس = ٧$ فما قيمة $\int_{-1}^{1}\left(٢ق(س) - هـ(س) + ٢س^{٣}\right).ءس$ ؟	٣٣
٢٥	فلسطين : ٢٠١٩ أجد قيمة $\int_{1}^{٤}\left(١ - \frac{٢}{\sqrt{س}}\right).ءس$	-١
٢٦	فلسطين : ٢٠١٩ إذا كان $\int_{٢}^{٧}\left(ق(س)\right).ءس = ٣$ ، $\int_{٣}^{٧}\left(٣ق(س)\right).ءس = -٩$، جد $\int_{٢}^{٣}\left(٤ق(س)\right).ءس$	٢٤
٢٧	فلسطين: ٢٠١٨ إكمال ديسمبر إذا كان: $\int\left(ق(س)\right).ءس = \frac{٨}{س^{٢}} + ب س + جـ$ ، وكان $\int_{-٢}^{1} ق(س).ءس = ١٨$ فما قيمة الثابت ب ؟	٤
٢٨	فلسطين : ٢٠١٨ إكمال أغسطس إذا كان $\int_{٢}^{٤} هـ(س).ءس = ٦$ ، $\int_{٢}^{٤}\left(٢هـ(س) + ب س\right).ءس = ١٨$ فما قيمة الثابت ب ؟	١
٢٩	فلسطين : ٢٠١٨ جد قيم جـ التي تجعل $\int_{٩}^{٤} \frac{جـ}{\sqrt{س}}.ءس = -٤$.	٢

إعداد المعلم: سائد الحلاق

٣٠	فلسطين: ٢٠١٧ إذا كان $\int_{١}^{٤} \left(\text{ق}(\text{س}) + ٣\text{س}^{٢}\right) .\text{دس} = ٧٣$ ، $\int_{١}^{٢} \left(\text{ق}(\text{س})\right) .\text{دس} = ١٠$، فأوجد $\int_{٤}^{٢} \left(\text{ق}(\text{س})\right) .\text{دس}$.	صفر
٣٢	فلسطين: ٢٠١٧ إكمال إذا كان $\int_{١}^{٧} \left(\text{ق}(\text{س}) - ١\right) .\text{دس} = ٨$ ، $\int_{٧}^{٣} \left(\text{ق}(\text{س})\right) .\text{دس} = -٦$، فأوجد $\int_{١}^{٣} \left(\text{ق}(\text{س})\right) .\text{دس}$.	٨
٣٣	فلسطين: ٢٠١٧ إكمال إذا كان: $\int_{١}^{\text{أ}} (٢\text{س} + ١) .\text{دس} = \int_{١}^{٣} (٣\text{س}^{٢} - \text{أ}) .\text{دس}$ ، فما قيمة / قيم الثابت أ ؟	-٧، ٤
٣٤	فلسطين: ٢٠١٦ جد قيمة التكامل الآتي : $\int_{١}^{٣} ٣\text{س}(\text{س} + ٦) .\text{دس}$	٩٨
٣٥	فلسطين: ٢٠١٥ إكمال جد قيمة التكامل الآتي : $\int_{١}^{٢} (\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢) .\text{دس}$	$-\frac{٥}{٣}$
٣٦	فلسطين: ٢٠١٤ إكمال جد قيمة ب التي تجعل $\int_{-١}^{١} (٣\text{ب}\text{س}^{٢} + ١) .\text{دس} = ٨$	٣
٣٧	فلسطين: ٢٠١٣ إكمال جد قيمة التكامل الآتي : $\int_{٠}^{١} \left(\text{س} \sqrt{\text{س}}\right) .\text{دس}$	$\frac{٢}{٥}$
٣٨	فلسطين: ٢٠١٢ إذا كان $\int_{٤}^{١} \text{ق}(\text{س}) .\text{دس} = ٣$ ، وجد قيمة $\int_{١}^{٤} \left(\text{س}^{-\frac{١}{٢}} + \text{ق}(\text{س})\right) .\text{دس}$	-١

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٣٩	فلسطين: ٢٠١٢ إذا كان $\int \text{ق}'(\text{س}).\text{دس} = \frac{٤}{\text{س}} + \text{س}^{٢} + \text{جـ}$ ، جد $\int_{١}^{٢} \text{ق}'(\text{س}).\text{دس}$	١
٤٠	فلسطين: ٢٠١١ إذا كان $\int_{٠}^{\text{أ}} (\text{س}+\text{أ}).\text{دس} = \int_{١}^{٣} (\text{أ}).\text{دس}$ ، فما قيمة الثابت أ ؟	٠ ، $\frac{٤}{٣}$
٤١	فلسطين: ٢٠١٠ إذا كان $\int_{٢}^{٥} \text{هـ}(\text{س}).\text{دس} = ٥$ ، $\int_{٧}^{٥} \text{هـ}(\text{س}).\text{دس} = -٣$ ، فجد: $\boxed{١}$ $\int_{٢}^{٧} \text{هـ}(\text{س}).\text{دس}$ $\boxed{٢}$ $\int_{٢}^{٥} (\text{هـ}(\text{س}) + ٢\text{س}).\text{دس}$	$\boxed{١}$ ٨ $\boxed{٢}$ ٢٦
٤٢	فلسطين : ٢٠٠٩ إذا كان $\int_{١}^{٢} (٢\text{س}+١).\text{دس} + \int_{٢}^{\text{ب}} (٢\text{س}+١).\text{دس} = ٠$ ، فما قيمة/قيم الثابت ب؟	−٢ ، ١
٤٣	فلسطين : ٢٠٠٨ إذا كان $\int \text{ع}'(\text{س}).\text{دس} = ٣\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + \text{جـ}$ ، فأوجد $\boxed{١}$ $\int_{-١}^{٢} \text{ع}'(\text{س}).\text{دس}$ $\boxed{٢}$ $\int \text{ع}(\text{س}).\text{دس}$ ، علماً بأن ع(٣) = ١	$\boxed{١}$ −١٥ $\boxed{٢}$ $\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + \text{جـ}$
٤٤	فلسطين : ٢٠٠٨ جد قيمة التكامل الآتي : $\int_{-١}^{١} (٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤).\text{دس}$	١٠
٤٥	فلسطين : ٢٠٠٨ إذا علمت أن : $\int_{١}^{\text{أ}} (٢\text{س} - ٥).\text{دس} = ١٨$ ، فما قيمة / قيم الثابت أ ؟	−٢ ، ٧
٤٦	فلسطين : ٢٠٠٧ جد قيمة التكامل الآتي : $\int_{١}^{-١} (\text{س}+١)^{٢}.\text{دس}$	$-\frac{٨}{٣}$
٤٧	فلسطين : ٢٠٠٧إكمال إذا كان $\int_{١}^{٥} (\text{ق}(\text{س})).\text{دس} = ٤$ ، $\int_{١}^{٣} (٢\text{ق}(\text{س})).\text{دس} = ١٢$ ، فما قيمة $\int_{٥}^{٣} \text{ق}(\text{س}).\text{دس}$	٢

إعداد المعلم: سائد الحلاق

دولة فلســـــــــطين وزارة التربية والتعليم العالي مديرية التربية والتعليم ـــ غرب غزة	اختبار التكامل		الاسم:	
	مادة الاختبار	الرياضيات		
	عدد الصفـــحات	١	المدرسة:		العلامة
	التاريخ:		الصف:	الثاني عشر أدبي وشرعي ( )	
	إعداد المعلم	سائد زياد الحلاق	الزمن:	ستون دقيقة	٢٠

السؤال الأول : ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة : (٦) علامات

١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}^{-٢}} + \int ٢\text{س}\,.\text{ءس}$ ، فما قيمة $\text{ق}'(٢)$ ؟

أ) ٦ ب) ٢ جـ) ١٢ د) ١٦

٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \int_{٢}^{٣} (٤\text{س}+١)^{٢}\,.\text{ءس}$ ، فإن $\text{ق}'(\text{س})$ يساوي

أ) صفر ب) $(٤\text{س}+١)^{٢}$ جـ) $١٦\text{س}+٨$ د) ١

٣) $\int \frac{٧}{٣} \sqrt[٣]{\text{س}^{٤}}\,.\text{ءس} =$

أ) $\frac{٧}{٤\sqrt[٣]{\text{س}}} + \text{جـ}$ ب) $\sqrt[٣]{\text{س}^{٧}} + \text{جـ}$ جـ) $\text{س}^{\frac{٧}{٣}}$ د) $\frac{٣}{٧}\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}}$

٤) إذا كان $\int_{١}^{٤} (٣ - \text{هـ}(\text{س}))\,.\text{ءس} = ٦$ ، فما قيمة $\int_{٤}^{١} \left(\frac{١}{٢}\text{هـ}(\text{س}) + ٤\right).\text{ءس}$ ؟

أ) صفر ب) ٧ جـ) -٥ د) -٧

٥) ما قيمة: $\int_{-٢}^{٢} \left(٢\text{هـ}'(\text{س}) + ٢\right).\text{ءس}$ ، إذا علمت $\text{هـ}(٢) = ٢$ ، $٢\text{هـ}(-٢) = ٢$ ؟

أ) ١٠ ب) ١٤ جـ) ٨ د) ٢

٦) إذا كان $\int_{\text{جـ}}^{١} (٦\text{س})\,.\text{ءس} = -٢٤$ ، فما قيمة الثابت جـ ؟

أ) ٣ ب) -٣ جـ) ±٣ د) ٢٧

السؤال الثاني: (٦) علامات

١) جد : $\int \left(\frac{٢\sqrt{\text{س}}}{٣} + \frac{٣}{\text{س}^{-٢}} + ٢\right).\text{ءس}$

٢) احسب قيمة : $\int_{٤}^{٨} \left(\frac{٤\text{س}}{\text{س}^{-٢}} + \frac{\text{س}}{٢} - ١\right).\text{ءس}$

السؤال الثالث : (٨) علامات

١) أجد قاعدة الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ الذي مشتقتهُ $\text{ق}'(\text{س}) = ٣\sqrt[٣]{\text{س}}$ ، علماً بأن $\text{ق}(١) = -٦$

٢) إذا كان $\int_{١}^{٤} (٣\text{ق}(\text{س}))\,.\text{ءس} + ٣ = -٣$ ، وكان $\int_{٣}^{٤} (\text{ق}(\text{س}) - ٣)\,.\text{ءس} = ١٢$ ، جد قيمة $\int_{١}^{٣} (٣\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س})\,.\text{ءس}$

إنتهى


ثالثاً

الاثراء

التفوق

الاختبارات

تمارين عامة | تمارين ومسائل (١–٧)

١)

الرقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الحل	د	أ	أ	جـ	جـ	أ	جـ	د	جـ	ب

٢)

ق(س) = س^{٣} − جـ س − ٦

ق$'$(س) = ٣س^{٢} − جـ

ق$'$(٢) = ٣(٢)^{٢} − جـ

٠ = ١٢ − جـ ← جـ = $\boxed{١٢}$

٣)

موسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

= $\frac{ق(١٨) - ق(١١)}{١٨ - ١١}$

= $\frac{\sqrt{١٨ - ٢} - \sqrt{١١ - ٢}}{٧}$

= $\frac{\sqrt{١٦} - \sqrt{٩}}{٧}$ = $\frac{٤ - ٣}{٧}$ = $\boxed{\frac{١}{٧}}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

٤)

ق(س) = س^{٣} − ١٢س − ٣

ق$'$(س) = ٣س^{٢} − ١٢

٠ = ٣س^{٢} − ١٢

$\frac{٣}{٣}$س^{٢} = $\frac{١٢}{٣}$

س^{٢} = ٤ (نأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

س = $\boxed{\pm ٢}$

٥

$ق(س) = \int_{ب}^{٥} (٢س + ١) \, ءس = ٢٤$

$\left(س^{٢} + س\right)\Big|_{ب}^{٥} = ٢٤$

$(٥^{٢} + ٥) - (ب^{٢} + ب) = ٢٤$

$٢٥ + ٥ - ب^{٢} - ب = ٢٤$

$٣٠ - ب^{٢} - ب = ٢٤$

$-٣٠ + ب^{٢} + ب + ٢٤ = ٠$

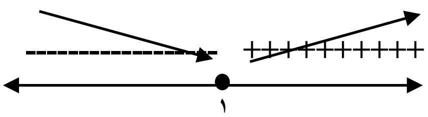
$ب^{٢} + ب - ٦ = ٠$

$(ب + ٣)(ب - ٢) = ٠$

إما $ب = \boxed{-٣}$ أو $ب = \boxed{٢}$

٦

$هـ(س) = ٤س^{٢} - ٨س + ١$



$هـ'(س) = ٨س - ٨$

$٨س - ٨ = ٠ \leftarrow \frac{٨}{٨}س = \frac{٨}{٨} \leftarrow س = \boxed{١}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

الاقتران متزايد على الفترة $[١ ، \infty[$

الاقتران متناقص على الفترة $]-\infty ، ١]$

من إشارة $هـ'(س)$ يتضح وجود قيمة صغرى محلية عند $س = ١$ وقيمتها :

$ق(١) = ٤(١)^{٢} - ٨ \times ١ + ١ = \boxed{-٣}$

أو تكتب :

$(١، ق(١))$ صغرى محلية $\leftarrow (١ ، -٣)$ صغرى محلية .

مدرسة التقوى الثانوية للبنين – أ. سائد الحلاق – مديرية غرب غزة

حلول | ورقة العمل من كتاب الفترة الأولى

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة:

(١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٥\sqrt{٩\text{س}^{٣}}$ ، أجد $\text{ق}'(١)$

$\text{ق}(\text{س}) = ٥ \times \sqrt{٩} \times \text{س}^{\frac{٣}{٢}}$

$\text{ق}(\text{س}) = ٥ \times ٣ \times \text{س}^{\frac{٣}{٢}}$

$\text{ق}(\text{س}) = ١٥ \times \text{س}^{\frac{٣}{٢}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٣}{٢} \times ١٥ \times \text{س}^{\frac{٣}{٢}-١}$

$\text{ق}'(١) = \frac{٣}{٢} \times ١٥ \times (١)^{\frac{١}{٢}} = \frac{٤٥}{٢} = \boxed{٢٢,٥}$ (الخيار غير موجود ضمن السؤال)

(٢) إذا كان متوسط تغير الاقتران $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ على فترة ما ، يساوي $\frac{٣}{٤}$ وكانت $\Delta\text{ص} = ٩$ ، فما قيمة $\Delta\text{ص} - \Delta\text{س}$ ؟

متوسط التغير $= \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} \leftarrow \frac{٣}{٤} = \frac{٩}{\Delta\text{س}}$ (بالضرب التبادلي)

$٣\,\Delta\text{س} = ٣٦ \leftarrow \Delta\text{س} = ١٢$

$\Delta\text{ص} - \Delta\text{س} = ٩ - ١٢ = \boxed{-٣}$ الخيار د

إعداد المعلم : سائد الحلاق

(٣) إذا كان $\text{ق}'(٤) = ٧$ ، $\text{ق}(٤) = ٢$ ، $\text{هـ}'(٤) = -٨ = ٢\text{هـ}(٤)$ ، فما قيمة $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(٤)$

$\text{هـ}'(٤) = -٨ = ٢\text{هـ}(٤) \leftarrow \text{هـ}'(٤) = \boxed{-٨}$ ، $\text{هـ}(٤) = \boxed{-٤}$

$$\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(٤) = \frac{\left(\text{هـ}(٤) \times \text{ق}'(٤)\right) - \left(\text{ق}(٤) \times \text{هـ}'(٤)\right)}{\left(\text{هـ}(٤)\right)^{٢}}$$

$$\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(٤) = \frac{(-٤ \times ٧) - (٢ \times -٨)}{(-٤)^{٢}} = \frac{-١٢}{١٦} = \boxed{\frac{-٣}{٤}}$$

الخيار أ

(٤) إذا كان $\text{ق}'(٢) = ٠$ ، $\text{ق}(٢) = -٧$ ، وكان للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ قيمة صغرى محلية وحيدة على مجالهُ ، فما أصغر قيمة للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ ؟

$\text{ق}(٢) = -٧ \leftarrow \text{ق}'(٢) = ٠$

أصغر قيمة للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ هي $\boxed{-٧}$ الخيار د


٢ أجد ق′ (س) فيما يأتي :

١) $ق(س) = (٣س^{٢} - ٢)(٧س^{٢} - ٣س + ١)$ عند $س = ١$

$$ق'(س) = (٣س^{٢} - ٢)(١٤س - ٣) + (٧س^{٢} - ٣س + ١)(٦س)$$

$$ق'(١) = (٣(١)^{٢} - ٢)(١٤ \times ١ - ٣) + (٧(١)^{٢} - ٣ \times ١ + ١)(٦ \times ١)$$

$$ق'(١) = (٣ - ٢)(١٤ - ٣) + (٧ - ٣ + ١)(٦)$$

$$ق'(١) = ١ \times ١١ + ٥ \times ٦$$

$$ق'(١) = ١١ + ٣٠ = \boxed{٤١}$$

٢) $ق(س) = \sqrt[٣]{س^{٥}} - \frac{٢}{س^{٣} - ٧} + ٥$ عند $س = -١$

$$ق(س) = س^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٢}{س^{٣} - ٧} + ٥$$

$$ق'(س) = \frac{٥}{٣} س^{\frac{٢}{٣}} - \frac{-٢(٣س^{٢})}{(س^{٣} - ٧)^{٢}}$$

$$ق'(س) = \frac{٥}{٣} \sqrt[٣]{س^{٢}} - \frac{-٢(٣س^{٢})}{(س^{٣} - ٧)^{٢}}$$

$$ق'(-١) = \frac{٥}{٣} \sqrt[٣]{(-١)^{٢}} - \frac{-٢(٣(-١)^{٢})}{((-١)^{٣} - ٧)^{٢}}$$

$$ق'(-١) = \left(\frac{٥}{٣} \times ١\right) - \frac{-٢ \times ٣}{(-٨)^{٢}}$$

$$ق'(-١) = \frac{٥}{٣} - \frac{-٦}{٦٤} = \frac{٥}{٣} + \frac{٦}{٦٤} = \boxed{\frac{٤٤}{٢٥}}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق


حلول الاختبار الذاتي من كتاب الفترة الأولى

١

الرقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
الحل	$\frac{٥}{٢٥}$	أ	ء	ب	أ	جـ	ب	أ	ب

٢ إذا كان $\int (٢س - ق(س)).ءس = س^٣ - ٢س^٢ + ٧س - ٣$ ، فما قيمة $\int_{٠}^{٢} (٣ق(س)).ءس$ ؟

$$\int (٢س).ءس - \int ق(س)ءس = س^٣ - ٢س^٢ + ٧س - ٣$$

$$-\int ق(س)ءس = س^٣ - ٢س^٢ + ٧س - ٣ - \int (٢س).ءس$$ (ضرب الطرفين في −١)

$$\int ق(س)ءس = -س^٣ + ٢س^٢ - ٧س + ٣ + \int (٢س).ءس$$

$$\int ق(س)ءس = -س^٣ + ٢س^٢ - ٧س + ٣ + \frac{٢س^٢}{٢} + جـ$$

$$\boxed{\int ق(س)ءس = -س^٣ + ٣س^٢ - ٧س + ٣ + جـ}$$

$$\int_{٠}^{٢} (٣ق(س)).ءس = ٣(-س^٣ + ٣س^٢ - ٧س + ٣ + جـ)\Big|_{٠}^{٢}$$

$$= ٣\left((-٢^٣ + ٣(٢)^٢ - ٧\times٢ + ٣ + جـ) - (-٠^٣ + ٣(٠)^٢ - ٧\times٠ + ٣ + جـ)\right)$$

$$= ٣\left((-٨ + ١٢ - ١٤ + ٣ + جـ) - (٣ + جـ)\right)$$

$$= ٣(-٧ + \cancel{جـ} - ٣ - \cancel{جـ}) = ٣ \times -١٠ = \boxed{-٣٠}$$ (يوجد حل آخر وهو باشتقاق الطرفين)

٣ إذا كان $\int_{٤}^{-١} هـ(س).ءس = ٩$ ، $\int_{-١}^{٤} ٢ق(س).ءس = -٨$ ، فما قيمة $\int_{-١}^{٤} (٢هـ(س) + ق(س)).ءس$ ؟

$$\int_{-١}^{٤} ٢ق(س).ءس = -٨ \leftarrow \int_{-١}^{٤} ق(س).ءس = \boxed{-٤}$$

$$\int_{-١}^{٤} (٢هـ(س) + ق(س)).ءس = \int_{-١}^{٤} (٢هـ(س)).ءس + \int_{-١}^{٤} (ق(س)).ءس$$

$$= (٢\times -٩) + (-٤) = -١٨ + (-٤) = \boxed{-٢٢}$$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

٤) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) على [٧ ، ٩] يساوي −٥ ،فما قيمة متوسط تغير الاقتران ك(س) = س ق(س) + ٢ على [٧ ، ٩] ، علماً بأن ق(٧) = ٤٠ .

$$\text{متوسط التغير للاقتران ق(س)} = \frac{\text{ق}(س_٢) - \text{ق}(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$-٥ = \frac{\text{ق}(٩) - \text{ق}(٧)}{٩ - ٧}$$

$$-٥ = \frac{\text{ق}(٩) - \text{ق}(٧)}{٢}$$ (بالضرب التبادلي) ← ينتج أن :

$$\text{ق}(٩) - \text{ق}(٧) = -١٠$$

$$\text{ق}(٩) - ٤٠ = -١٠$$

$$\leftarrow \text{ق}(٩) = \boxed{٣٠}$$

$$\text{متوسط التغير للاقتران ك(س)} = \frac{\text{ك}(س_٢) - \text{ك}(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{\text{ك}(٩) - \text{ك}(٧)}{٩ - ٧}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$$= \frac{(٩\text{ق}(٩) + ٢) - (٧\text{ق}(٧) + ٢)}{٢}$$

$$= \frac{(٩ \times ٣٠ + ٢) - (٧ \times ٤٠ + ٢)}{٢}$$

$$= \frac{-١٠}{٢} = \boxed{-٥}$$

٥) أ) الاقتران متزايد على الفترة] ٩ ، ∞ [

ب) عند س = ٩

جـ) لا ، لأن الاقتران ق (س) لم يغير من سلوكهُ حول س = ٣ (متناقص قبل ٣ ومتناقص بعد ٣)


١ – ٧ أسئلة اثراء الوحدة الأولى (التفاضل و التكامل)

القسم الأول: أسئلة اختيار من المتعدد :

السؤال الأول / ضع دائرة رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

١ إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين (-٢ ، -٦) ، (٤ ، -٣) ، فما متوسط التغير للاقتران ق(س)؟

أ -٢ ب ٢ ج -٠,٥ د ٠,٥

٢ يقطع المستقيم م منحنى الاقتران هـ(س) في النقطتين (-٣ ، ٢أ) ، (٣ ، ٢) ، فإذا كان ميلهُ يساوي ٤ ، فما قيمة أ ؟

أ ١١ ب -١١ ج -٢٢ د -١٣

٣ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) للفترة [-١ ، ٣] يساوي $\frac{١}{٤}$ ، وكان ق(٣) = ٢ ، فما قيمة ق(-١)؟

أ ٤ ب ٢ ج ١ د -١

٤ ما متوسط تغير الاقتران ق(س) للفترة [-٢ ، ٣] ، إذا علمت أن ق(٣) - ق(-٢) = -١٠ ؟

أ -٢ ب $-\frac{١}{٢}$ ج -٥ د -١٠

٥ ما متوسط تغير الاقتران ق(س) = $\frac{١}{٢}$س + ٢ عندما تتغير س من $س_١$ = -٢ إلى $س_١$ = ٢ ؟

أ -١ ب ١ ج $\frac{١}{٢}$ د ٢

٦ إذا علمت أن متوسط تغير الاقتران ق(س) = أس + ٣ في الفترة [-٤ ، ٥] هو ٥ ، فما قيمة الثابت أ ؟

إعداد المعلم سائد الحلاق

أ ٧ ب ٤٥ ج ٥ د -٥

٧ إذا كان الاقتران ق(س) = $\frac{٣}{٥}\sqrt[٣]{س^٥}$ + س ، فما قيمة ق'(٨)؟

أ ٤ ب ٥١٣ ج ٥ د ٦٥

٩ إذا كان الاقتران ق(س) = أ $س^{-٢}$ ، وكان ق'(-١) = ١٠ .فما قيمة الثابت أ؟

أ ٥ ب -٥ ج -١٠ د ١٠

١٠ اذا كان ق(س) = ٢هـ(س) - ٣س ، وكان ٢ق'(٢) = ١٠ ، فما قيمة هـ'(٢) ؟

أ -٤ ب ٨ ج ١ د ٤

١١ إذا كان الاقتران ق(س) = $٢س^٣$ + ١ ، هـ(س) = $٤س^{-١}$ - ٢س ، فما قيمة (ق - هـ)'(٢) ؟

أ ٢٧ ب ٢١ ج -٢٧ د ٢٤

١٢ إذا كان ل(س) = ٢ق(س) × هـ(س)، جد ل′(٢) علماً بأن: ق(٢) = −١ ، ق′(٢) = ٤ ، هـ(٢) = −٢ ، هـ′(٢) = −٣

أ ٢٢ ب −١٠ ج −٢٢ د ١٠

١٣ إذا كان ل(س) = ق(س) ÷ هـ(س)، جد ل′(١) علماً بأن: ق(١) = ١ ، ق′(١) = ٢ ، هـ(١) = −٢ ، هـ′(١) = −١

أ $-\frac{٣}{٤}$ ب $\frac{٣}{٤}$ ج $-\frac{٣}{٢}$ د $-\frac{٥}{٤}$

١٤ إذا كان الاقتران ق(س) = أس^{٢} + ٤س − ٥ ، لهُ قيمة صغرى محلية عند س = ١ ، فما قيمة الثابت أ ؟

أ −١ ب −٢ ج ٢ د −٤

١٥ ليكن الاقتران ل(س) = ٣س^{٢} − ١٢س + ١ ، فإن الاقتران ل(س) يكون متزايد للفترة:

أ]−٢، ∞[ب]−∞، −٢] ج]−∞، ٢] د [٢، ∞[

١٦ إذا كانت ق′(س) = س^{٢} − ٦س + ٥، فما قيمة س التي يكون عندها قيمة صغرى محلية؟

أ −٥ ب ٥ ج ١ د −١

١٧ $\int \left(\frac{٧}{٣}س \sqrt[٣]{س}\right).ءس =$ ....

أ س$^{\frac{٧}{٣}}$ + جـ ب س$^{\frac{٣}{٧}}$ + جـ ج $\sqrt[٧]{س^{٣}}$ + جـ د $\frac{٤٩}{٩}$س$^{\frac{٧}{٣}}$ + جـ

١٨ اذا كان ق(س) = $\int_{-٣}^{٤}$ (س^{٥} − ٦س^{٢} + ٢س).ءس ، فما قيمة ق′(−٣) ؟

أ ٥س^{٤} − ٦س + ٢ ب س^{٥} − ٦س^{٢} + ٢س ج ٠ د ١

١٩ إذا كان ق(س) = $\int$ (٨س^{٧} + ٢س).ءس ، فإن ق′(س) تساوي

أ ٦٥س^{٦} + ٢ ب س^{٨} + ٢س ج ٠ د ٨س^{٧} + ٢س

٢٠ ما قيمة $\int_{١}^{٤}$ (٥س $\sqrt{س}$).ءس ؟

أ −٦٦ ب ٦٦ ج ٦٤ د ٦٢

٢١ إذا كان الاقتران ق(س) = س^{٣} + $\int$ (٣س^{٢}).ءس ، فما قيمة ق′(٢) ؟

أ ٦٤ ب ٣٢ ج ٤٨ د ٢٤

٢٢ إذا كان الاقتران ق(س) = $\int$ (٣س^{٢} + جـ).ءس ، وكان ق′(٢) = ١٦ ، ما قيمة الثابت جـ ؟

أ ٤ ب ٢٨ ج ٨ د −٤

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٢٣ إذا كان $\int$ ق′(س) = (٣س^٣ + ٢س + جـ) ، فما قيمة ق′(٢)؟

أ −٢٢ ب ٣٨ جـ ٢٨ د ١٤

٢٤ ما قيمة $\int_{٠}^{٣}$ (س^{١/٢} $\sqrt{\text{س}^{٣}}$) .دس ؟

أ ٩ ب −٩ جـ ٢٧ د −٢٧

٢٥ إذا كان $\int_{-٣}^{ب}$ (ب) .دس = ١٠ ، فما قيمة / قيم ب ؟

أ ٥ ، ٢ ب −٥ ، ٢ جـ ٥ ، −٢ د −٥ ، −٢

٢٦ إذا كان $\int_{٢}^{٣}$ (٢ق(س)) .دس = −٨ ، ما قيمة $\int_{٣}^{٢}$ (٣ق(س) + ٢س) .دس؟

أ −٢ ب ٧ جـ ١٧ د ٢٥

٢٧ إذا كان $\int_{١}^{-٢}$ (ق(س)) .دس = ٤ ، $\int_{١}^{٣}$ (٢ق(س)) .دس = −٤ ما قيمة $\int_{-٢}^{٣}$ (٣ق(س)) .دس؟

أ −٢٤ ب −٦ جـ −١٨ د ١٨

٢٨ إذا كان $\int_{-٣}^{-٢}$ (ق(س)) .دس = ٣ ، $\int_{-٢}^{٣}$ (ق(س)) .دس = −١ ما قيمة $\int_{-٣}^{٣}$ ($\frac{١}{٢}$ق(س)) .دس؟

إعداد المعلم : سائد الحلاق

أ −٢ ب −٤ جـ −٨ د ١

٢٩ إذا كان ق(−٢) = ٤ ، ق(٣) = −٣ ، فما قيمة $\int_{-٢}^{٣}$ (٣ق′(س)) .دس؟

أ −١٤ ب −٧ جـ ٣ د −٢١

٣٠ إذا كان ق(٤) = ٣ ق(٢) ، وكان $\int_{٢}^{٤}$ (ق′(س)) .دس = ١٠ ، فما قيمة ق(٢) ؟

أ ١٠ ب ٢٠ جـ ٥ د −١٦

٣١ إذا كان $\int_{٣}^{٥}$ (ق(س)) .دس = ١٠ ، $\int_{٥}^{٣}$ ($\frac{١}{٢}$هـ(س)) .دس = −٢ ، فما قيمة $\int_{٣}^{٥}$ ٢ق(س) + هـ(س)) .دس؟

أ ٢٤ ب ٢٨ جـ ٢٢ د ١٢

القسم الثاني: الأسئلة المقالية :

أجب عن الأسئلة التالية: (أولاً : التفاضل)

١. أجد متوسط تغير الاقتران ق(س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ عندما تتغير س في الفترة [٥ ، ١٠]

٢. إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٢ ، ب] هو ٥، حيث ق(٢) = ٢ ، ق(ب) = ٧، أجد قيمة الثابت ب

٣. إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س في الفترة [١ ، ٤] هو ١٠، جد متوسط التغيرل لاقتران هـ(س) = ٣س + ٢ق(س) في نفس الفترة.

٤. يقطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين (٤ ، −٦) ،(−٢ ، جـ) فإذا كان ميلهُ يساوي $\frac{٢}{٣}$ ،ما قيمة الثابت جـ ؟

٥. إذا كان: ٢هـ(س) = ٧ق(س) − ٤$\sqrt{\text{س}}$ ، جد (ق)′(٤) إذا علمت أن : هـ′(٤) = ١٠

٦. إذا كان: ص = (٢س^{٢} + ٣س)(٥ − ٣س) ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند س = ٢

٧. إذا كان: ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = ٣س + ٢ ، جد (٢ق × هـ)′(−١)

٨. إذا كان: ٢ق(س) = هـ(س) × س^{٢} ، وكان: ق′(٢) = −١ ، ق(٢) = ١ جد هـ′(٢)

٩. ليكن ق(س) = س^{٣} هـ(س) − ٢$\sqrt{\text{س}}$ ، وكان ق(١) = ٢ ، ٢ق′(١) = −٦ فما هـ′(١)؟

١٠. إذا كان (ق × ٤هـ)′(٣) = ٢٤ ، وكان ق′(٣) = ٢ ، هـ(٣) = −٢ ، هـ′(٣) = ٥ ، جد ق(٣)

١١. ليكن هـ(س) = ٢$\sqrt{\text{س}}$ + (ق(س) × س^{٢})، أجد هـ′(١) ، إذا علمت أن: ق(١) = ٢ ، ق′(١) = −٣

١٢. ليكن ق(س) = $\frac{\text{٣س} - ١}{\text{٢هـ(س)}}$ + ٢س^{٣} ، أجد ق′(٢)، إذا علمت أن: هـ(٢) = −٢ ، هـ′(٢) = ٢

١٣. ليكن الاقتران ق(س) = ٢ب س^{٣} + $\frac{٣}{٤}$س^{٢} + ٦٠ وكان ق′(٢) = ٦٠ ، فما قيمة الثابت ب؟

١٤. إذا كان للاقتران ق(س) = ٢س^{٣} + ب س^{٢} لهُ قيمة صغرى محلية عند النقطة س = ١ أجد قيمة ب ، ثم أجد ق′(−٢)

١٥. ليكن ق(س) = س^{٣} − ١٢س + ٣ ، س ∈ ح ، جد:

أ) القيم القصوى للاقتران ق(س) وحدد نوعها . ب) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على مجالهُ

١٦. ليكن ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} − ١ ، س ∈ ح ، جد:

أ) القيم القصوى للاقتران ق(س) وحدد نوعها . ب) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على مجالهُ

إعداد المعلم: سائد الحلاق

١٧) ليكن: $ق(س) = -٢س^{٣} + ٩س^{٢} - ١٢س$ ، جد:
أ) القيم القصوى للاقتران $ق(س)$ وحدد نوعها . ب) فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س)$ على مجالهُ

١٨) إذا كان للاقتران $ق(س) = أس^{٣} - ٣س^{٢} - ١٢س + ب$ قيمة عظمى محلية عند $س = -١$ وكان $ق(٢) = ١٠$
أجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

١٩) إذا كان للاقتران $ق(س) = س^{٣} + أس^{٢} - ب$ لهُ قيمة قصوى محلية عند النقطة (٢، ١) أجد قيمة أ ، ب

٢٠) إذا كان للاقتران $ق(س) = س^{٣} - جس + ٤$ قيمة عظمى محلية عند النقطة $س = -١$ أجد قيمة س التي تجعل للاقتران عندها قيمة صغرى محلية.

أجب عن الأسئلة التالية : (ثانياً: التكامل)

١) جد : $\int (س^{٤} - ٤س^{-٣} - ٣س^{٢} + ٨).ءس$

٢) جد : $\int \left(٨س^{٣} - \frac{١}{٢س^{٢}}\right).ءس$

٣) جد : $\int \left(\sqrt[٤]{س^{٣}} + ٢س\right).ءس$

٤) جد : $\int \left(\frac{٨}{٥}س^{\frac{٣}{٥}} + \sqrt{س}\right).ءس$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٥) جد قيمة : $\int_{-١}^{٣} (٦س^{٢} + ٤س).ءس$

٦) جد قيمة : $\int_{٠}^{١} \left(\sqrt[٣]{س} + ٧\right).ءس$

٧) جد قيمة : $\int_{١}^{٤} \left(٢\sqrt{س} - ٢س - \frac{٢}{س^{٣}}\right).ءس$

٨) جد قيمة : $\int_{-٣}^{-١} \left(\frac{٣}{س^{٢}} - ٣س\right).ءس$

٩) أوجد قاعدة الاقتران $ق(س)$ الذي مشتقتهُ تعطى بالقاعدة : $ق'(س) = ٣س^{٢} - ٤س + ٤$، $ق(٢) = ٨$

١٠) أوجد قاعدة الاقتران $ق(س)$ الذي مشتقتهُ تعطى بالقاعدة : $ق'(س) = ٤س^{٣} - ٢س - ٣$ ، وأن $ق(٣) = ١٠$

١١) إذا كان : $\int_{1}^{-2} (-2ق(س))\,دس = 10$، $\int_{1}^{3} (3ق(س))\,دس = 21$، ما قيمة $\int_{-2}^{3} (2ق(س))\,دس$ ؟

١٢) إذا كان : $\int (هـ(س) + 4س)\,دس = 3س^2 + 2س + 5$ ، فما قيمة $\int_{0}^{3} (هـ(س))\,دس$ ؟

١٣) إذا كان $\int_{-3}^{-2} (ق(س))\,دس = 8$ ، $\int_{3}^{-2} (2ق(س))\,دس = -2$ ، ما قيمة $\int_{-3}^{3} 3(ق(س)+1)\,دس$ ؟

١٤) إذا كان : $\int_{1}^{-2} 2ق(س)\,دس = 10$ ، $\int_{1}^{3} ق(س)\,دس = -8$ ، جد $\int_{-2}^{3} (3ق(س) + 2س)\,دس$

١٥) إذا كان $\int_{3}^{-2} \left(\frac{1}{3}ق(س)\right)\,دس = -2$ ، $\int_{3}^{5} (-3ق(س) + 2س)\,دس = 3$ ، أوجد $\int_{-2}^{5} (3ق(س) + 3س^2)\,دس$

١٦) إذا كان $\int_{3}^{5} (3ق(س))\,دس = -9$ ، $\int_{5}^{3} \left(\frac{1}{2}هـ(س)\right)\,دس = -1$ ، فما قيمة $\int_{5}^{3} (2ق(س) - 3هـ(س))\,دس$ ؟

١٧) إذا كان $\int_{2}^{4} (-2ق(س))\,دس = 8$ ، $\int_{4}^{2} (3هـ(س))\,دس = 12$ ، أوجد $\int_{2}^{4} 2(ق(س) + 2هـ(س) + 4س)\,دس$

١٨) إذا كان $\int_{-1}^{1} (5ق(س))\,دس = 15$، أوجد $\int_{1}^{-1} (3هـ'(س) + 2ق(س) + 2س)\,دس$

علماً بأن: $\frac{هـ(1)}{2} = -1$ ، $4هـ(-1) = -8$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١٩) إذا كان : $\int ق(س)\,دس = 3س^2 + 3س + جـ$ ، فما قيمة $\int_{-1}^{1} 3ق(س)\,دس$ ؟

٢٠) إذا كان : $\int_{2}^{4} (4س + ب)\,دس = 14$ ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟

٢١) إذا كان : $\int_{1}^{ب} (ب + 1)\,دس = 24$ ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟

٢٢) إذا كان $\int_{7}^{ب} (ب)\,دس = 8$ ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟

٢٣) إذا كان : $\int_{ب}^{2} (4س - 3)\,دس = 20$ ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟

١ – ٨ أسئلة تفوق الوحدة الأولى (التفاضل و التكامل)

حاول أن تحل الأسئلة التالية :

١. إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = $\sqrt{\text{١+س}}$ + ٣ ، هو $\frac{١}{٣}$ في الفترة[ب، ٣] ، فما قيمة الثابت ب

٢. إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة[-٢، ٢] هو ٦ ، وكان متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ب ق(س) - ٢ لنفس الفترة يساوي ١٢ ، فما قيمة الثابت ب ؟

٣. ليكن الاقتران ق(س) = ٢ب س^{٣} + $\frac{٣}{٤}$س^{٢} - $\sqrt{\text{س}}$ ، وكان ق′(٢) = ٥٥ ، فما قيمة الثابت ب ؟

٤. إذا كان الاقتران ق(س) = (س^{٢} - ٧)(٥ + أس) ، وكان ق′(١) = -٢ فما قيمة الثابت أ ؟

٥. ليكن الاقتران ق(س) = أس^{٢} + ب س + ٣ ، وكان ق′(١) = -٢ ، ق(١) = ٤ فما قيمة الثابتين أ، ب ؟

٦. إذا كان ق(٢) = ٣ ، ق′(٢) = ٤ ، هـ(س) = س^{٢} + ب ، جد قيمة الثابت ب إذا علمت أن :

(ق × هـ)′(٢) = ٣٢

٧. إذا كان (ق × هـ)′(١) = ٨ ، وكان ٣ق(١) = ٦ ، $\frac{\text{ق}'(١)}{٢}$ = -٢ فما قيمة الثابت ب إذا علمت أن :

هـ (١) = ٤س + ب

٨. إذا كان هـ(س) = (ق(س) + أس^{٢}) ، وكان - ق(٢) = -٧ ، ق′(٢) = -٣، هـ′(٢) = ٢٤

فما قيمة الثابت أ؟

٩. ليكن ق(س) = س^{٣} هـ(س) - ٢$\sqrt{\text{س}}$ ، وكان ق(١) = ٢ ، ٢ق′(١) = -٦ فما هـ′(١)؟

١٠. ليكن الاقتران ق(س) = $\frac{\text{ب س}^{٢} - ٤}{\text{س} + ١}$ ، س ≠ -١ ، وكان ق′(٢) = ٤ فما قيمة الثابت ب ؟

١١. إذا كان الاقتران ق(س) = -$\frac{\text{٣ب}}{\text{س}}$ - س^{٣} ، س ≠ ٠ ، يأخذ قيمة قصوى محلية عند س = ١، فما قيمة الثابت ب؟

(١٢) إذا كان الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - \text{ب س} + \text{أ}$ ، $\text{س} \in \text{ح}$ ، فما قيمة كل من الثابتين أ، ب والذي يجعل للاقتران قيمة صغرى محلية عند $\text{س} = ١$.

(١٣) إذا كان الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = -\text{أس}^{٣} + ١٢\text{س} - \text{ب}$ ، $\text{س} \in \text{ح}$ ، فما قيمة كل من الثابتين أ، ب والذي يجعل للاقتران قيمة عظمى محلية عند النقطة $(٢، ١٢)$.

(١٤) ما قيمة : $\int_{٣}^{٦} \left(\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{س}^{٣}}\right) \text{ءس}$ ؟

(١٥) إذا كان $\int \left(\text{ق}'(\text{س})\right) \text{ءس} = \text{أ س}^{٢} - \text{ب س} + ٧$ ، أجد قيمة كل من الثابتين أ، ب إذا علمت أن:

$-٢\text{ق}'(٢) = ٦$ ، $-\frac{١}{٢}\text{ق}(١) = -١$

(١٦) إذا كان $\int \left(\text{ل}'(\text{س})\right) \text{ءس} = ٦\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + \text{جـ}$ ، أجد قيمة $\int_{-١}^{١} \text{ل}(\text{س}) \text{ءس}$

إذا علمت أن: $\text{ل}(٢) = ٢٥$

(١٧) إذا كان $\int_{١}^{٤} \frac{١}{٣}\text{ق}(\text{س}) \text{ءس} = -١$ ، $\int_{٥}^{٤} (٢\text{ق}(\text{س})) \text{ءس} = ٨$ ، فما قيمة الثابت ب إذا علمت أن :

$\int_{١}^{٥} ٢(\text{ق}(\text{س}) + \text{ب}) \text{ءس} = ١٨$

(١٨) إذا كان $\int_{٣}^{٤} \frac{٢}{٣}\text{ق}(\text{س}) \text{ءس} = ١٠$ ، $\int_{٤}^{٣} (\text{ق}(\text{س}) - \text{ب}) \text{ءس} = -٥$ ، فما قيمة الثابت ب ؟

(١٩) إذا كان $\int_{٢}^{٣} -٢\text{ق}(\text{س}) \text{ءس} = ٦$ ، أجد $\int_{٣}^{٢} \left(٢\text{هـ}'(\text{س}) + \text{ق}(\text{س})\right) \text{ءس}$ ، علماً بأن: $\text{هـ}(٢) = ٣$ ، $٢\text{هـ}(٣) = ٥$

(٢٠) إذا كان $\int_{٤}^{-١} ٣\text{ق}(\text{س}) \text{ءس} = -١٢$ ، $\int_{-١}^{٤} \left(\frac{١}{٢}\text{ق}(\text{س}) + \text{جـ}\right) \text{ءس} = ٧$ ، فما قيمة / قيم الثابت جـ ؟

(٢١) إذا كان $\int_{٦}^{\text{جـ}} (٢\text{س}) \text{ءس} = \int_{\text{جـ}}^{\text{جـ}} \left(٤\text{س} + \sqrt[٤]{\text{س}^{٤}} + ٤\right)^{٤} \text{ءس}$ ، ما قيمة / قيم الثابت جـ ؟

إعداد المعلم : سائد الحلاق

(٢٢) إذا كان $\int_{٢}^{أ} \left(\text{هـ}'(\text{س})\right).\text{ءس} = \int_{١}^{أ} \left(\text{هـ}'(\text{س}) - ١\right).\text{ءس}$ ، وكان $\int_{١}^{٢} \left(\text{هـ}'(\text{س})\right).\text{ءس} = ٣$.

ما قيمة / قيم الثابت أ ؟

(٢٣) إذا كان $\int_{\text{ب}}^{١} \left(٢(\text{س} - ٢\text{ب})\right).\text{ءس} = \int_{٠}^{١} (٥\,\text{ب} + ١).\text{ءس}$ ، ما قيمة / قيم الثابت **ب** ؟

(٢٤) إذا كان $\int_{١}^{٣} \left(٥\text{و}(\text{س})\right).\text{ءس} = -٥$ ، $\int_{٣}^{١} \left(\text{و}(\text{س}) + ٢\text{جـ}\text{س}\right).\text{ءس} = -٧$ ، ما قيمة / قيم الثابت **جـ** ؟

(٢٥) إذا كان $\int_{٢}^{٥} \left(٢\text{هـ}'(\text{س}) + \text{و}'(\text{س}) + ٢\text{س}\right).\text{ءس} = ٢٥$ وكان

$٣\text{هـ}(٥) = ٣$ ، $٢\text{هـ}(٢) = -٣$ ، $٢(\text{و}(٥) - \text{و}(٢)) = ٤\text{ب} - ٢$ ما قيمة / قيم الثابت ب ؟

(٢٦) إذا كان $\int_{-١}^{٢} \left(\text{هـ}'(\text{س}) + ٣\text{و}(\text{س}) - ٣\right).\text{ءس} = ١٩$ وكان $\int_{٢}^{-١} \left(-٤\text{و}(\text{س})\right).\text{ءس} = ٨$ ،

وكان $\text{هـ}(٢) - \text{هـ}(-١) = ٣\text{ب} + ١$ ما قيمة / قيم الثابت ب ؟

(٢٧) إذا كان $\int_{٢}^{١} \left(٢\text{و}(\text{س})\right).\text{ءس} = ١٠$ ، $\int_{-١}^{٣} \left(٣\text{هـ}(\text{س})\right).\text{ءس} = ٢١$ وكان $\int_{٢}^{٣} \left(\text{و}(\text{س}) + ٢\text{س}\right).\text{ءس} = ١٥$ ،

إعداد المعلم : سائد الحلاق

أجد قيمة $\int_{٣}^{-١} \left(\text{و}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\right).\text{ءس}$ ؟

(٢٨) إذا كان $\text{و}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^{٢} + ٢\text{ب}$ وكان $\frac{\text{و}'(٢)}{-٢} = -٤$ ، $\int_{٠}^{١} \left(\text{و}(\text{س})\right).\text{ءس} = \frac{٢٠}{٣}$ ،

فما قيمة كل من الثابتين أ ، ب ؟

(٢٩) أوجد قيمة $\int_{٠}^{١} \left(\sqrt{\sqrt{\text{س}}}\right).\text{ءس}$

(٣٠) أوجد قيمة $\int_{٠}^{١} \left(\sqrt{\text{س}\sqrt{\text{س}}}\right).\text{ءس}$

دولة فلسطين وزارة التربية والتعليم العالي مديرية التربية والتعليم ــ غرب غزة	اختبار نهاية الوحدة الأولى		الاسم:
	مادة الاختبار	الرياضيات	
	عدد الصفحات	٢	المدرسة:
	التاريخ:		الصف: الثاني عشر أدبي وشرعي ( )
	إعداد المعلم	سائد زياد الحلاق	الزمن: تسعون دقيقة

العلامة	
٥٠	

السؤال الأول: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة: (١٥) علامة

١) ما متوسط التغير للاقتران $ق(س) = \sqrt{٣س} + \sqrt{٩}$ ، علماً بأن $\Delta س = ٩$ ، $س_١ = ٣$ ؟

أ) $-\frac{٣}{٩}$ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) ٣ د) $\frac{١٥}{٩}$

٢) إذا كان متوسط تغير الاقتران $ق(س) = \frac{١}{س^{-٢}} - ١$ ، للفترة $[٢، جـ]$ هو -٤ ، فما قيمة الثابت جـ ؟

أ) ٢، -٦ ب) ٦ جـ) -٦ د) ٢

٣) إذا كان الاقتران $ق(س) = أس^٣ + \sqrt{أ}$ ، وكان $ق'(-١) = ١٢$. فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٤ ب) -٤ جـ) $\sqrt{٤}$ د) ١٢

٤) إذا كان $\frac{١}{٢}(ق \times هـ)'(٣) = ٣٠$ ، $٢ق(٣) = -٨$ ، $ق'(٣) = ٥$ ، $\frac{١}{٢}هـ(٣) = ٥$ ، فما قيمة $هـ'(٣)$؟

أ) ١ ب) ٥ جـ) -٥ د) -٢٠

٥) ما إذا كان الاقتران $ق(س) = \frac{جـ}{٢س + ١}$ ، وكان $ق'(٣) = ٢$. فما قيمة الثابت جـ ؟

أ) -٩٨ ب) ٩٨ جـ) ١٦٨ د) -٤٩

٦) إذا كان للاقتران $هـ(س) = بس^٢ + ٨س + ٥$ ، $س \in ح$ ، قيمة صغرى محلية عند $س = ١$ ، فما قيمة الثابت ب ؟

أ) ٤ ب) -٤ جـ) -٨ د) ٨

٧) إذا كان الاقتران $ق(س) = ٣س^٢ + \int (٦س).دس - \int_{٢}^{٣} (٤س^{\circ}).دس$ ، فما قيمة $ق'(-٣)$ ؟

أ) -١٨ ب) ١٨ جـ) -٣٦ د) ٣٦

٨) إذا كان $\int ق'(س) = (٢س^٢ - ٤س + جـ)$ ، فما قيمة $ق'(٣)$؟

أ) ٦ ب) ٨ جـ) ١٢ د) ٠

٩) ما قيمة $\int_{ب}^{ب} ٤\pi^٣.دس$ ؟

أ) $٤\pi^٣$ ب) $\pi^٤$ جـ) صفر د) ١

١٠) إذا كان $\int_{١}^{٥} (٣ق(س)).دس = ٦$ ، فما قيمة $\int_{٥}^{١} ٢(ق(س) + ١).دس$؟

أ) -١٢ ب) ٨ جـ) ٢ د) ٤

إعداد المعلم : سائد الحلاق


السؤال الثاني: (١٠) علامات

١) إذا كان متوسط تغير الاقتران ٯ(س) عندما تتغير س في الفترة [١ ، ٥] هو ١٢ ، جد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ٢س + ٣ٯ(س) في نفس الفترة.

٢) إذا كان : $ٯ(س) = \frac{٣س + ٢}{٢هـ(س)} + ٥س$ ، جد ٯ'(١) ، إذا علمت أن : هـ(١) = ٢ ، هـ'(١) = −٣

السؤال الثالث : (١٠) علامات

١) إذا كان : $\int_{٢}^{١} -٤ٯ(س).ءس - ١ = ٧$ ، $\int_{١}^{٣} \frac{١}{٤}ٯ(س).ءس = -١$ ، جد قيمة $\int_{٢}^{٣} (ٯ(س) + ٢س).ءس$

٢) إذا كان $\int_{٤}^{-١} ٣ٯ(س).ءس = -١٢$ ، $\int_{-١}^{٤} \left(\frac{١}{٢}ٯ(س) + ب\right).ءس = ٧$ ، فما قيمة الثابت قيمة ب .

السؤال الرابع : (١٥) علامة

١) أوجد قاعدة الاقتران ٯ(س) الذي مشتقة ٯ'(س) = ٣ $\sqrt{س}$ − ٣ ، إذا علمت أن : ٯ(١) = ١٠

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٢) إذا كان الاقتران ٯ(س) = ٢س^{٣} − ٩س^{٢} + ١٢س + ٧ ، س ∈ ع ، جد:

أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ٯ(س) على ع

ب) القيم القصوى للاقتران ٯ(س) ، ثم حدد نوعها.

إنتهى

الوحدة الثانية

المصفوفات

ملخص المصفوفات

المصفوفة : عبارة عن مجموعة من الأعداد الحقيقية منظمة على هيئة مستطيل لينتج عدداً من الصفوف (م) وعدداً من الأعمدة (ن) محصورة بين قوسين من النوع [ ] ، وتكون المصفوفة من الرتبة (م × ن).

المدخلة : أي عدد حقيقي داخل قوسين المصفوفة يسمى مدخلة ،وتتحدد أي مدخلة في المصفوفة حسب الصف والعمود الواقعة فيهما ، فالمدخلة التي تقع في تقاطع الصف ي مع العمود هـ هي المدخلة $أ_{ي هـ}$.

عدد مدخلات المصفوفة = عدد صفوفها م × عدد أعمدتها ن .

رتبة المصفوفة: يقصد برتبة المصفوفة الصفة العددية التي تدل على عدد صفوف المصفوفة وعدد أعمدتها.

أنواع خاصة من المصفوفات:

١) **المصفوفة المربعة** : هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد صفوفها مع عدد أعمدتها وتسمى عندئذ مصفوفة مربعة من الرتبة النونية (ن) فمثلاً: ← أ = $\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ المصفوفة أ مصفوفة مربعة لأن عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

٢) **مصفوفة الوحدة** : هي مصفوفة مربعة يكون كل مدخلة من مدخلاتها التي تشكل القطر الرئيسي من أعلى اليمين إلى أسفل تساوي واحد صحيح ، وباقي المدخلات أصفار، وتكون شكلها على النحو التالي:

فمثلاً ← $م_٢ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $م_٣ = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ وهكذا ....

٣) **المصفوفة الصفرية** :هي مصفوفة جميع مدخلاتها أصفار ورمزها (و) فمثلاً: ← $و_{٢×٢} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $و_{٣×٢} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٤) **مصفوفة الصف** (السطرية) : هي التي تتكون من صف واحد فقط ، فمثلاً : ← $ب_{١×٣} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٥ \end{bmatrix}$

٥) **مصفوفة العمود** (الرأسية) : تتكون من عمود واحد فمثلاً: ← $جـ_{٣×١} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$

تساوي مصفوفتين : تتساوى المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة م×ن ، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية

إعداد المعلم: سائد الحلاق

العمليات على المصفوفات

(١) **جمع مصفوفتين** : إذا كانت أ،ب مصفوفتين من الرتبة نفسها م×ن فإن مجموع المصفوفتين أ + ب = جـ هي مصفوفة من الرتبة م×ن مدخلاتها ناتجة من جمع المدخلات المتناظرة في كل من أ،ب أي أن : $جـ_{يهـ} = أ_{يهـ} + ب_{يهـ}$

(٢) **طرح مصفوفتين** : إذا كانت أ،ب مصفوفتين من الرتبة نفسها م×ن فإن ناتج طرح المصفوفتين أ – ب = جـ هي مصفوفة من الرتبة م×ن مدخلاتها ناتجة من طرح المدخلات المتناظرة في كل من المصفوفتين أ،ب أي أن : $جـ_{يهـ} = أ_{يهـ} - ب_{يهـ}$

(٣) **ضرب المصفوفة بعدد حقيقي** : إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م×ن وكان جـ عدداً حقيقياً فإن جـ×أ مصفوفة من الرتبة م×ن وتكون مدخلاتها على النحو : $جـ(أ_{يهـ}) = (جـ أ_{يهـ})$ لجميع قيم ي ، هـ .

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي:

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، و مصفوفات من نفس الرتبة ، ك ∈ ح فإن :

(١) أ + ب = ب + أ .... {الخاصية التبديلية}

(٢) (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)................... {الخاصية التجميعية}

(٣) أ + و = و + أ = أ................................. {المصفوفة الصفرية المحايدة لعملية الجمع}

(٤) أ + (–أ) = (–أ) + أ = و............................. {خاصية النظير الجمعي}

(٥) ك(أ + ب) = ك أ + ك ب .... {توزيع الضرب بعدد حقيقي على جمع المصفوفات}

ملاحظات مهمة

- المصفوفة الصفرية هي المصفوفة المحايدة لعملية جمع المصفوفات.
- عملية جمع المصفوفات عملية تبديلية.
- عملية طرح المصفوفات عملية ليست تبديلية.
- تسمى المصفوفة (–١)أ النظير الجمعي للمصفوفة أ
- نحصل على النظير الجمعي للمصفوفة بتغير إشارة كل مدخلة من مدخلات المصفوفة
- عند ضرب المصفوفة بعدد حقيقي لا ننظر لرتبة المصفوفة

إعداد المعلم : سائد الحلاق

④ **ضرب مصفوفتين** : إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م×ن ، ب مصفوفة من الرتبة ن×ل فإن حاصل الضرب على النحو التالي : $أ_{م×ن} × ب_{ن×ل} = جـ_{م×ل}$

إذا أمكن إجراء ضرب مصفوفتين ،فإن المصفوفة الناتجة تكوون رتبتها عدد صفوف المصفوفة الأولى × عدد أعمدة المصفوفة الثاني

- عملية ضرب المصفوفات عملية غير إبدالية.

المصفوفة $م_٢ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات من الرتبة الثانية ، وتسمى أيضاً مصفوفة الوحدة.

المحددات

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، فإن محدد المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ هو عدد حقيقي ويرمز لهُ بالرمز | أ |

حيث : $|أ| = (أ_{١١} × أ_{٢٢}) - (أ_{١٢} × أ_{٢١})$.

- تسمى المصفوفة التي محددها يساوي صفر المصفوفة المنفردة
- إذا تساوت المدخلات المتناظرة في أي صفين أو عمودين في محدد فإن قيمة المحدد تساوي صفر.
- إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، ك عدد حقيقي ، فإن $|ك أ| = ك^٢ |أ|$
- إذا كانت أ مصفوفة مربعة غير منفردة من الرتبة الثانية ، فإن المصفوفة ب من الرتبة الثانية تسمى نظيراً ضربياً للمصفوفة أ إذا كان أ.ب = ب.أ = $م_٢$ ، حيث $م_٢$ المصفوفة المحايدة.
- ويرمز للنظير الضربي للمصفوفة أ بالرمز $أ^{-١}$. أي أن : $أ . أ^{-١} = أ^{-١} . أ = م_٢$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

- المصفوفة المنفردة ليس لها نظير ضربي.

| أ | = صفر ← لا يوجد نظير ضربي. (منفردة)

| أ | ≠ صفر ← يوجد نظير ضربي. (ليست منفردة)

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ حيث $|أ| \neq ٠$ ، مصفوفة غير منفردة ، فإن $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \begin{bmatrix} أ_{٢٢} & -أ_{٢١} \\ -أ_{١٢} & أ_{١١} \end{bmatrix}$

أي أن : $أ^{-١}$ تنتج من ضرب مقلوب محدد المصفوفة أ بالمصفوفة أ بعد تبديل أماكن مدخلات القطر الرئيسي للمصفوفة أ وتغيير إشارة مدخلات القطر الآخر من المصفوفة أ .

(نقلب مدخلات القطر الرئيسي ، ونعكس إشارات القطر الفرعي (الآخر) مقسوماً على محدد المصفوفة)

خطوات حل أنظمة المعادلات بطريقة النظير الضربي:

- نرتب المعادلات إن لزم ذلك.
- نكتبها على الصورة $أ \times ع = جـ$
- نجد النظير الضربي $(أ^{-1})$ لمصفوفة المعاملات $(أ)$
- نضرب طرفي المعادلة دائماً من اليمين بالمصفوفة $أ^{-1}$
- نستخدم تساوي مصفوفتين فنحصل على قيمتي س ، ص.

الرموز

- $أ$: مصفوفة المعاملات.
- $أ^{-1}$: النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.
- ع: مصفوفة المتغيرات

قاعدة كريمر :

تستخدم طريقة كريمر لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، والذي يمكن كتابتهُ بالصورة المصفوفية كالآتي : $أ . ع = جـ$ ،

أ : مصفوفة المعاملات ع: مصفوفة المتغيرات جـ: مصفوفة الثوابت. $|أ| \neq 0$ ، فيكون:

- $س = \frac{|أ_س|}{|أ|}$ ، $أ_س$: المصفوفة أ بعد استبدال مدخلات عمود معاملات س فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.
- $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|}$ ، $أ_ص$: المصفوفة أ بعد استبدال مدخلات عمود معاملات ص فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

إعداد المعلم : سائد الحلاق

خطوات حل أنظمة المعادلات الخطية بطريقة كريمر:

- نرتب المعادلات إن لزم ذلك.
- نكتبها على الصورة $أ\ س + ب\ ص = جـ$
- نكتب نظام المعادلات على الصورة $أ . ع = جـ$
- نجد $|أ|$
- نجد $|أ_س|$ ثم $|أ_ص|$ حسب القانون أعلاه.
- لإيجاد قيمة س نستخدم : $س = \frac{|أ_س|}{|أ|}$
- لإيجاد قيمة ص نستخدم : $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|}$

علاقات

- $|أ_س| = س \times |أ|$
- $|أ| = \frac{|أ_س|}{س}$
- $|أ_ص| = ص \times |أ|$
- $|أ| = \frac{|أ_ص|}{ص}$

٢ – ١ المصفـــوفـــــــــــــــــة

تستخدم المصفوفات في العلوم الإحصائية والإقتصادية والهندسية والفيزيائية ، كما أن كثيراً من الحسابات التي تجريها الأدمغة الالكترونية تُستخدم فيها المصفوفات ، وكان أول رائد في هذا المجال هو العالم كيلي Cayley الذي أبرز نظرية المصفوفات عام ١٨٥٨م.

وتلعب المصفوفات دوراً هاماً فى التعبير عن العلاقات الرياضية متعددة المتغيرات بشكل بسيط يسهل فهمه وبالتالى وضع الحلول لهذه العلاقات ،ونحتاج في حياتنا تبويب وعرض بيانات معينة على هيئة جداول مستطيلة الشكل مكونة من عدد من الصفوف ومن الأعمدة.

ملخص الدرس

أولاً : المصفوفة

تعريف المصفوفة

١) عبارة عن مجموعة من الأعداد الحقيقية منظمة على هيئة مستطيل لينتج عدداً من الصفوف (م) وعدداً من الأعمدة(ن) محصورة بين قوسين من النوع [ ] ، وتكون المصفوفة من الرتبة(م×ن).

٢) تسمية المصفوفة : نرمز للمصفوفة بأي حرف كبير من الحروف الهجائية مثل أ ، ب ،جـ ، ....

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٣) الصورة العامة للمصفوفة من الرتبة(م×ن)، تكون ← $\text{أ}_{م\times ن} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١ن} & .. & \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٢ن} & .. & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٢١} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ \text{أ}_{من} & .. & \text{أ}_{م٣} & \text{أ}_{م٢} & \text{أ}_{م١} \end{bmatrix}$

٤) المدخلة : أي عدد حقيقي داخل قوسين المصفوفة يسمى مدخلة ،وتتحدد أي مدخلة في المصفوفة حسب الصف والعمود الواقعة فيهما ، فالمدخلة التي تقع في تقاطع الصف ي مع العمود ه هي المدخلة $\text{أ}_{ي\,ه}$.

عدد مدخلات المصفوفة = عدد صفوفها م × عدد أعمدتها ن .

٥) رتبة المصفوفة : يقصد برتبة المصفوفة الصفة العددية التي تدل على عدد صفوف المصفوفة وعدد أعمدتها.

$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & -١ & ٢ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}_{٢\times ٣}$ ← يقال أنها من الرتبة ٢ × ٣ وتقرأ (اثنان ضرب ثلاثة).

$\text{أ}_{٢٣}$ هو العنصر الواقع في الصف الثاني والعمود الثالث وقيمتهُ ٦

$\text{أ}_{١٢}$ هو العنصر الواقع في الصف الأول والعمود الثاني وقيمتهُ –١

أنواع خاصة من المصفوفات

١) المصفوفة المربعة :

هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد صفوفها مع عدد أعمدتها وتسمى عندئذ مصفوفة مربعة من الرتبة النونية (ن) .

فمثلاً: ← $أ = \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ المصفوفة أ مصفوفة مربعة لأن عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

٢) مصفوفة الوحدة : هي مصفوفة مربعة يكون كل مدخلة من مدخلاتها التي تشكل القطر الرئيسي من أعلى اليمين إلى أسفل تساوي واحد صحيح ، وباقي المدخلات أصفار، وتكون شكلها على النحو التالي:

فمثلاً ← $م_٢ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $م_٣ = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ وهكذا ....

٣) المصفوفة الصفرية :هي مصفوفة جميع مدخلاتها أصفار ورمزها (و) فمثلاً:← $و_{٢×٢} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $و_{٣×٢} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٤) مصفوفة الصف (السطرية) : هي التي تتكون من صف واحد فقط ، فمثلاً : ← $ب_{١×٣} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٥ \end{bmatrix}$

٥) مصفوفة العمود (الرأسية) : تتكون من عمود واحد فمثلاً: ← $ج_{٣×١} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$

ملاحظة

المصفوفة المكونة من عنصر واحد فقط [٥] يمكن تسميتها : مصفوفة الصف ، مصفوفة العمود ، أو مربعة من الدرجة الأولى

ثانياً : تساوي مصفوفتين

تعريف

تتساوى المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة م×ن ، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية .

فمثلاً : ← $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix}$ نقول بالرموز ← أ = ب

أمثلة محلولة

مثال ١

إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} ٦ & ٨ & ٤ \\ ٩ & -٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فأجب عن الأسئلة التالية:

١) ما رتبة المصفوفة ب ؟ $\boxed{٢ \times ٣}$

٢) ما العدد الموجود في الصف الأول والعمود الثالث ؟ $\boxed{٤}$

٣) ما اسم المدخلة التي قيمتها ٥ في المصفوفة ب ؟ $\boxed{ب_{٣٢}}$

٤) ما قيمة المدخلة ب$_{١٢}$ ؟ $\boxed{٩}$

مثال ٢

إذا كانت $\begin{bmatrix} \sqrt{س} & ٦ \\ -٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ص + س \\ -٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ جد قيمة كل من الثابتين س ، ص

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الحـــل

من تساوي مصفوفتين ينتج أن :

$\sqrt{س} = ٢ \leftarrow (\sqrt{س})^٢ = (٢)^٢ \leftarrow س = \boxed{٤}$

ص + س = ٦ ← ص + ٤ = ٦ ← ص = ٦ − ٤ ← ص = $\boxed{٢}$

مثال ٣

فلسطين : ٢٠١٩

إذا كانت $\begin{bmatrix} س^٢ & ص + ٢ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ س + ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ما قيمة س ، ص على الترتيب؟

الحـــل

من تساوي مصفوفتين ينتج أن : س + ٢ = ٤ ← س = $\boxed{٢}$

ص + ٢ = ٣ ← ص = ٣ − ٢ ← $\boxed{ص = ١}$

قيمة س ، ص على الترتيب : ٢ ، ١

مثال ٤

إذا كانت $\begin{bmatrix} س^{٢} & ص^{٢} \\ ٥ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س & ٤ \\ ٥ & -٥ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل من الثابتين س ، ص ؟

الحل

من تساوي مصفوفتين ينتج أن :

$ص^{٢} = ٤ \leftarrow ص = \boxed{\pm ٢}$

$س^{٢} = س \leftarrow س^{٢} - س = ٠$

$س(س - ١) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ١$

مدرسة التقوى الثانوية للبنين أ. سائد الحلاق مديرية غرب غزة

مثال ٥

إذا كانت $\begin{bmatrix} ص+٢ & س+ص \\ ٢س+٢ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ٨ & ع+ص \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل من الثوابت س ، ص ، ع ؟

الحل

من تساوي مصفوفتين ينتج أن :

$٢س + ٢ = ٨$

$٢س = ٦$

$س = \boxed{٣}$

$ص + ٢ = -٢$

$ص = -٢ - ٢$

$ص = \boxed{-٤}$

$ع + ص = ١٠$

$ع + ٣ = ١٠$

$ع = \boxed{٧}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ٦

أوجد قيم س ، ص ، ع ، ل التي تحقق المعادلة المصفوفة $\begin{bmatrix} س+ص & -٧ & س-ص \\ ٢س+ص & ٨ & \frac{ع}{٢}-١١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & -٧ & ٢ \\ ع & ٨ & ل \end{bmatrix}$.

الحل

من تساوي مصفوفتين ينتج أن :

$س + \cancel{ص} = ١٠$

$س - \cancel{ص} = ٢$

$٢س = ١٢$

$\boxed{س = ٦}$

$٦ + ص = ١٠$

$\boxed{ص = ٤}$

$٢س + ص = ع$

$٢ \times ٦ + ٤ = ع$

$\boxed{ع = ١٦}$

$ل = \frac{ع}{٢} - ١١$

$ل = \frac{١٦}{٢} - ١١$

$ل = ٨ - ١١ = \boxed{-٣}$

$\therefore$ $س = \boxed{٦}$ ، $ص = \boxed{٤}$ ، $ع = \boxed{١٦}$ ، $ل = \boxed{-٣}$

المصفوفة — حلول تمارين ومسائل (٢–١)

١

$$\begin{bmatrix} ٥٠٠ & ٤٧٠ & ٢٣٠ \\ ٤٠٠ & ٢٥٠ & ١٨٠ \end{bmatrix}$$

٢

أ) رتبة المصفوفة أ ٣×٢ ، رتبة المصفوفة ب ٣×٣ ، رتبة المصفوفة ج ١×٣

ب) نوع المصفوفة أ مصفوفة صفرية أو مستطيلة ، نوع المصفوفة ب مصفوفة مربعة ، نوع المصفوفة ج مصفوفة الصف

ج) ج$_{١٢}$ = $\boxed{٣}$ ، أ$_{٢١}$ = $\boxed{٠}$ ، ب$_{١٣}$ = $\boxed{-٨}$

٣

أ)

$$\begin{bmatrix} ٤-ب & ٥ \\ ٧ & ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٧ & ج+١ \end{bmatrix}$$

٤ − ب = ٧ ← ٤ − ٧ = ب ← ب = $\boxed{-٣}$

ب = ج + ١ ← −٣ = ج + ١ ← −٣ − ١ = ج ← ج = $\boxed{-٤}$

ب)

$$\begin{bmatrix} ٥ \\ ٢-٣ب \\ ج+ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٨ \\ ٧ \end{bmatrix}$$

٢ − ٣ب = ٨ ← ٢ − ٨ = ٣ب ← ب = $\frac{\cancel{-٦}^{-٢}}{\cancel{٣}}$ ← ب = $\boxed{-٢}$

ج + ب = ٧ ← ج − ٢ = ٧ ← ج = ٧ + ٢ ← ج = $\boxed{٩}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

ج)

$$\begin{bmatrix} ١ & ٦ & ٩ \\ ٨ & ٥ & ب^٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٦ & ج^٢ \\ ٨ & ٥ & ب \end{bmatrix}$$

ج^٢ = ٩ ← ج = $\boxed{\pm ٣}$

ب^٢ = ب ← ب^٢ − ب = ٠ ← ب(ب − ١) = ٠

ب = $\boxed{٠}$ ، ب = $\boxed{١}$

٤

(حل المعادلتين بطريقة الحذف)

$\cancel{س}$ + ص = ٤

$\cancel{\mp س}$ ± ٢ص = ∓١

―――――――――

٣ص = ٣

ص = $\boxed{١}$

نعوض عن قيمة ص في أحد المعادلتين لإيجاد قيمة س س + ص = ٤ ← س + ١ = ٤ ← س = $\boxed{٣}$

ورقة عمل ٢ – ١ المصفوفة

أولاً إختر الإجابة الصحيحة

مدرسة الشوى الثانوية للبنين أ. سائد الحلاق مديرية غرب غزة

① ما رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -٣ & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ؟

أ ٦ ب ٢×٣ ج ٣×٢ د ٣+٢

② ما قيمة المدخلة $\text{ب}_{١٢}$ في المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٧ \\ -١ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ؟

أ -١ ب ٥ ج ٠ د ٧

③ إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} -٣ \\ ٥ \\ -٢ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة : $\text{س}_{٢١} + ٣\text{ص}_{١٢}$ ؟

أ ١٥ ب ١٠ ج ٤٠ د ٢٠

④ إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٥ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ج = $\begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٨ \\ -١ & ٢ & ٣ \\ ١١ & ٧ & ٥ \end{bmatrix}$ فما قيمة : $٢(\text{ج}_{٣١} - ٢\text{ب}_{٢٢})$ ؟

إعداد المعلم: سائد الحلاق

أ -٨ ب ٨ ج ٢٤ د ٤

⑤ أي من المصفوفات التالية مصفوفة الوحدة؟

أ $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

⑥ إذا كانت $\begin{bmatrix} \sqrt[3]{\text{ص}} & ٥ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة ص؟

أ $\sqrt[3]{٢}$ ب ٨ ج -٨ د $\sqrt[3]{٨}$

⑦ إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{ص} + \text{س} & \text{س} \\ \text{ص} & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ ٦ & -٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $\frac{١}{٢}(\text{س})$ ؟

أ ٢ ب -١ ج ١ د ٤

٨) فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

لتكن $\text{س} = \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $\text{س}_{٢٢} - ٣\text{ص}_{٢١}$ ؟

أ) −٢ ب) −١ جـ) −١١ د) −١٠

٩) فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٠ \\ -٥ & ٤ & -٢ \\ ١ & ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة: $٣\text{أ}_{٣٢} \times \text{أ}_{١٣}$ ؟

أ) ١٢ ب) −١٠ جـ) −٦ د) −١٥

١٠) الخليل : ٢٠٢٠ تجريبي ف١

إذا كان $\begin{bmatrix} \text{س}+\text{ص} & ٧ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٧ \\ -٣ & ٢\text{س}+١ \end{bmatrix}$ ، فإن قيمتي $\text{س} \times \text{ص} =$

أ) ٢ ، ١ ب) ٢ ، −١ جـ) −٢ د) ٢

١١) بيت لحم : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كانت $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٢-٣\text{س} \\ \text{س}+\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٨ \\ ٧ \end{bmatrix}$ ، فإن قيمة $\text{س} - \text{ص} =$

أ) −١٣ ب) ٩ جـ) −٥ د) −١١

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١٢) فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $\text{أ}_{١١} + \text{أ}_{١٢}$ ؟

أ) ٣ ب) −٣ جـ) ٢ د) −٤

١٣) فلسطين: ٢٠٢٠

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ & ٥ \\ ١ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $\text{أ}_{٣٢} - ٢\text{أ}_{٢١}$ ؟

أ) ٧ ب) ٦ جـ) ٢ د) ١


ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال		الجواب النهائي
١	إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ١ & ١١ & ٧ \\ -٥ & ٤ & -٢ \\ -١ & ٦ & ١٠ \end{bmatrix}$ ، فأجب عن الأسئلة التالية:		
	أ ما رتبة المصفوفة س ؟	أ	٣ × ٣
	ب ما العدد الموجود في الصف الثاني والعمود الثالث ؟	ب	-٢
	جـ ما اسم المدخلة التي قيمتها -٥ في المصفوفة س ؟	جـ	$س_{١٢}$
	د ما قيمة المدخلة $س_{٣١}$ ؟	د	٧
٢	إذا كانت $\begin{bmatrix} س & ١٠ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١٠ \\ ٦ & س + ص \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل من الثابتين س ، ص ؟		س = ٧ ص = -٤
٣	إذا كانت $\begin{bmatrix} س^{٢} - ٣ & ٥ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ص^{٢} - ٥ص & ٤ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة س ، ص ؟		س = $\mp$ ٣ ص = ٦، -١
٤	إذا كانت $\begin{bmatrix} س^{٢} - ٣ & ٩ \\ -٦ & -٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٩ \\ س^{٢} - ٥س & -٨ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة س ؟		س = ٣
٥	إذا كانت $\begin{bmatrix} س - ١ & ٠ \\ ٢س + ١ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ + ص \\ ٢ع - ١ & ٣ل + ١ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة س، ص، ع ، ل ؟		س = ٥ ، ص = -٣ ع = ٦ ، ل = ٣
٦	إذا كان $\begin{bmatrix} س + ٣ص \\ س + ٢ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ ٧ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة س ، ص ؟		س = ٣ ص = ٢
٧	أوجد قيم : س ، ص ، ع ، ل التي تحقق المعادلة المصفوفية التالية: $\begin{bmatrix} \frac{س}{٢} & ٤ص \\ ٨ & -١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٨ \\ س + ٢ع & ٢ص - ل \end{bmatrix}$		س = ٤ ، ص = -٢ ع = ٢ ، ل = ٨

إعداد المعلم: سائد الحلاق

٨	أوجد قيم : س ، ص ، ع ، ل التي تحقق المعادلة المصفوفية التالية: $\begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٢ل & ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س - ص & س + ص \\ ٢ع + ٤ & ٢س + ص \end{bmatrix}$	س = ٦ ، ص = ٤ ع = ١٦ ، ل = ١٨
٩	أوجد قيم : أ ، ب ، جـ ، ء التي تحقق المعادلة المصفوفية التالية: $\begin{bmatrix} ٤ & -٢٧ \\ ٥ & ١٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[٣]{ب} & أ^{٣} \\ \sqrt{جـ} & ء^{٢} \end{bmatrix}$	أ = −٣ ، ب = ٦٤ جـ = ٢٥ ، ء = ±٤
١٠	إذا كان $\begin{bmatrix} س^{٢} & س^{٣} - ٤س \\ ٧ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢س & ٠ \\ ٧ & -٥ \end{bmatrix}$ ، فما قيم س ؟	س = ٠ ، ٢
١١	إذا كانت : س = $\begin{bmatrix} ٨ & ٦ & ٤ \\ -٢ & ١١ & -١ \\ ٢ & ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٥ & ٨ \\ -٣ & ٦ \end{bmatrix}$ فما قيمة : $\frac{١}{٢} \times \left(٣س_{٣٢} + ٢ص_{١٢}\right)$ ؟	٣
١٢	الوسطى: ٢٠١٩ تجريبي ف١ إذا كانت : $\begin{bmatrix} ١٠ & ص^{٢} \\ ٥ & س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص + ٧ & ٩ \\ ٥ & \sqrt{١٦} \end{bmatrix}$ جد قيمة $(س + ص)^{٢}$.	٤٩
١٣	سلفيت: ٢٠٢٠ تجريبي ف١ أوجد قيمة كل من س ، ص في المعادلة المصفوفة التالية: $\begin{bmatrix} ١٠ & س - ١ \\ ص^{٢} & س + ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ٩ & ١٣ \end{bmatrix}$	س = ٦ ص = ±٣

مدرسة الشقوى الثانوية للبنين أ. سائد الحلاق غرب
إعداد المعلم : سائد الحلاق

٢ – ٢ العمليات على المصفوفات

ملخص الدرس

أولاً : جمع المصفوفات

تعريف

إذا كانت أ، ب مصفوفتين من الرتبة نفسها م × ن فإن مجموع المصفوفتين أ + ب = جـ هي مصفوفة من الرتبة م × ن مدخلاتها ناتجة من جمع المدخلات المتناظرة في كل من أ، ب أي أن : جـ$_{يهـ}$ = أ$_{يهـ}$ + ب$_{يهـ}$

ثانياً : ضرب المصفوفة بعدد حقيقي

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن وكان جـ عدداً حقيقياً فإن جـ.أ مصفوفة من الرتبة م × ن وتكون مدخلاتها على النحو :

جـ(أ$_{يهـ}$) = (جـ أ$_{يهـ}$) لجميع قيم ي ، هـ .

ثالثاً : طرح المصفوفات

تعريف

إعداد المعلم : سائد الحلاق

إذا كانت أ، ب مصفوفتين من الرتبة نفسها م × ن فإن ناتج طرح المصفوفتين أ – ب = جـ هي مصفوفة من الرتبة م × ن مدخلاتها ناتجة من طرح المدخلات المتناظرة في كل من المصفوفتين أ، ب أي أن : جـ$_{يهـ}$ = أ$_{يهـ}$ – ب$_{يهـ}$

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، و ، مصفوفات من نفس الرتبة ، ك ∈ ح فإن :

١) أ + ب = ب + أ .... { الخاصية التبديلية }

٢) (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) .... { الخاصية التجميعية }

٣) أ + و = و + أ = أ .... { المصفوفة الصفرية المحايدة لعملية الجمع }

٤) أ + (–أ) = (–أ) + أ = و .... { خاصية النظير الجمعي }

٥) ك(أ + ب) = ك أ + ك ب .... { توزيع الضرب بعدد حقيقي على جمع المصفوفات }

أمثلة محلولة

مثال ١

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ & ٥ \\ -٧ & ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٢ \\ ٧ & -٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جد :

نستطيع إجراء عملية الجمع لتساوي الرتب

١) س + ص = $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ & ٥ \\ -٧ & ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٢ \\ ٧ & -٤ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦+٦ & ٢+٣ & ٥+٢ \\ -٧+٧ & ٤+-٤ & -١+٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٥ & ٧ \\ ٠ & ٠ & -١ \end{bmatrix}$

٢) ص + س = $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٢ \\ ٧ & -٤ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & ٢ & ٥ \\ -٧ & ٤ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٥ & ٧ \\ ٠ & ٠ & -١ \end{bmatrix}$

٣) ماذا تلاحظ من الناتجين؟ نلاحظ أن عملية جمع المصفوفات عملية تبديلية.

٤) س + و = $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ & ٥ \\ -٧ & ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ & ٥ \\ -٧ & ٤ & -١ \end{bmatrix}$

٥) و + ص = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٢ \\ ٧ & -٤ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٢ \\ ٧ & -٤ & ٠ \end{bmatrix}$

ملاحظة

المصفوفة الصفرية هي المصفوفة المحايدة لعملية جمع المصفوفات.

مثال ٢

إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٨ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، جد :

نستطيع إجراء عملية الطرح لتساوي الرتب

١) ب − جـ = $\begin{bmatrix} -١ & ٨ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١-٥ & ٨-٣ \\ ٦--٢ & ٤-١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ٥ \\ ٨ & ٣ \end{bmatrix}$

٢) جـ − ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١ & ٨ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & -٥ \\ -٨ & -٣ \end{bmatrix}$

ملاحظة

عملية طرح المصفوفات عملية ليست تبديلية.

مثال ٣

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$ ، جد (–١)أ

الحـــل

(–١)أ = $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$

أ + (–١)أ = $\begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ = و٢

ملاحظة

تسمى المصفوفة (–١)أ النظير الجمعي للمصفوفة أ

مثال ٤

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ & ٣ \\ ٨ & -٥ & ٠ \\ ١ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، جد :

عند ضرب المصفوفة بعدد حقيقي لا ننظر لرتبة المصفوفة

١) ٢أ = $\begin{bmatrix} ٢\times٦ & ٢\times٢ & ٢\times٣ \\ ٢\times٨ & ٢\times-٥ & ٢\times٠ \\ ٢\times١ & ٢\times٤ & ٢\times٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٤ & ٦ \\ ١٦ & -١٠ & ٠ \\ ٢ & ٨ & ١٠ \end{bmatrix}$

ضرب العدد ٢ في جميع المدخلات

٢) ٣أ = $\begin{bmatrix} ٣\times٦ & ٣\times٢ & ٣\times٣ \\ ٣\times٨ & ٣\times-٥ & ٣\times٠ \\ ٣\times١ & ٣\times٤ & ٣\times٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٨ & ٦ & ٩ \\ ٢٤ & -١٥ & ٠ \\ ٣ & ١٢ & ١٥ \end{bmatrix}$

ضرب العدد ٣ في جميع المدخلات

مثال ٥

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٢ & -٤ & ٨ \end{bmatrix}$ ، جد $\frac{١}{٢}$س

الحـــل

نُقسم جميع المدخلات على ٢

$\frac{١}{٢}$س = $\begin{bmatrix} \frac{٢}{٢} & \frac{-٤}{٢} & \frac{٨}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٤ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم سائد الحلاق

مثال ٦

إذا علمت أن: أ $= \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، وكانت المصفوفة س = أ + ب ، فما قيمة ٢س$_{٢٢}$ + س$_{١٢}$ ؟

الحل

أولاً : نجد أ + ب $= \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ٤ & ١٠ \end{bmatrix}$

ثانياً نجد قيمة : ٢س$_{٢٢}$ + س$_{١٢}$ $= (٢ \times ٤) + ١٠ = ٨ + ١٠ = \boxed{١٨}$

مثال ٧

إذا علمت أن : أ $= \begin{bmatrix} -١ & ٦ \\ ٤ & ٧ \\ ٨ & -٥ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & -٧ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$ فما قيمة ١١أ − ١٠(أ + ب) + ٩ب ؟

الحل

١١أ − ١٠(أ + ب) + ٩ب = ١١أ − ١٠أ − ١٠ب + ٩ب = أ − ب

$$أ - ب = \begin{bmatrix} -١ & ٦ \\ ٤ & ٧ \\ ٨ & -٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & -٧ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٤ & ١٤ \\ ١١ & -٧ \end{bmatrix}$$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

مثال ٨

إذا كانت : أ $= \begin{bmatrix} ٤ \\ -٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$ ، ٢ب $= \begin{bmatrix} ٤ \\ ٨ \\ -٨ \end{bmatrix}$ ، حل المعادلة المصفوفية : ٢س = ٣(ب − ٢أ)

أولاً: نجد: ٢ب $= \begin{bmatrix} ٤ \\ ٨ \\ -٨ \end{bmatrix}$ ← ب $= \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ -٤ \end{bmatrix}$ ، ثانياً : نجد أ $= \begin{bmatrix} ٤ \\ -٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$ ← ٢أ $= \begin{bmatrix} ٨ \\ -١٠ \\ ١٢ \end{bmatrix}$

ثالثاً : ٣(ب − ٢أ) $= ٣\left(\begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ -٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ \\ -١٠ \\ ١٢ \end{bmatrix}\right) = ٣\begin{bmatrix} -٦ \\ ١٤ \\ -١٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٨ \\ ٤٢ \\ -٤٨ \end{bmatrix}$

٢س = ٣(ب − ٢أ) ← ٢س $= \begin{bmatrix} -١٨ \\ ٤٢ \\ -٤٨ \end{bmatrix}$ ← س $= \begin{bmatrix} \frac{-١٨}{٢} \\ \frac{٤٢}{٢} \\ \frac{-٤٨}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٩ \\ ٢١ \\ -٢٤ \end{bmatrix}$


مثال ٩

حل المعادلة المصفوفة: $\text{٢س} + \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & -٢ \end{bmatrix} = \text{س} + ٢\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$.

الحل

$$\text{٢س} + \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & -٢ \end{bmatrix} = \text{س} + \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

إضافة النظير الجمعي للمصفوفة التي تحتها خط للطرفين

$$\text{٢س} + \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -٥ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix} = \text{س} + \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -٥ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\text{٢س} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \text{س} + \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -٨ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\text{٢س} - \text{س} = \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -٨ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -٨ & ٢ \end{bmatrix}$$

نحصل على النظير الجمعي للمصفوفة بتغير إشارة كل مدخلة من مدخلات المصفوفة

مثال ١٠

إعداد المعلم : سائد الحلاق

حل المعادلة المصفوفية : $\text{٢س} + \text{أ} = \text{٢ب}$ ، حيث : $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & -٦ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٣ \end{bmatrix}$

الحل

$$\text{٢س} + \text{أ} = \text{٢ب}$$

$$\text{٢س} + \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & -٦ \end{bmatrix} = ٢\begin{bmatrix} ١ & -١ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\text{٢س} + \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & -٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٢ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$\text{٢س} = \begin{bmatrix} ٢ & -٢ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & -٦ \end{bmatrix}$$

$$\text{٢س} = \begin{bmatrix} -٢ & -٤ & ١٢ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} \frac{-٢}{٢} & \frac{-٤}{٢} & \frac{١٢}{٢} \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} -١ & -٢ & ٦ \end{bmatrix}$$

مثال ١١

حل المعادلة المصفوفية : $3\left(2\text{س} + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 5\text{س}$

الحـــل

$$6\text{س} + \begin{bmatrix} 15 & 9 \\ 12 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + 5\text{س}$$

$$6\text{س} - 5\text{س} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 9 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} -13 & -3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$$

مدرسة التقوى الثانوية للبنين
أ. سائد الحلاق
مديرية غرب غزة

مثال ١٢

حل المعادلة المصفوفية: $3\text{س} + م_3 = 3\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 4 & -5 & 8 \\ 0 & -8 & 9 \end{bmatrix} + \frac{\text{س}}{3}\right) - و_3$

الحـــل

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$$3\text{س} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 9 & -6 & 18 \\ 12 & -15 & 24 \\ 0 & -24 & 27 \end{bmatrix} + \cancel{3} \times \frac{\text{س}}{\cancel{3}}\right) - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3\text{س} - \text{س} = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 18 \\ 12 & -15 & 24 \\ 0 & -24 & 27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2\text{س} = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 18 \\ 12 & -16 & 24 \\ 0 & -24 & 26 \end{bmatrix} \leftarrow \text{س} = \begin{bmatrix} \frac{8}{2} & \frac{-6}{2} & \frac{18}{2} \\ \frac{12}{2} & \frac{-16}{2} & \frac{24}{2} \\ \frac{0}{2} & \frac{-24}{2} & \frac{26}{2} \end{bmatrix} \leftarrow \text{س} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 9 \\ 6 & -8 & 12 \\ 0 & -12 & 13 \end{bmatrix}$$

العمليات على المصفوفات

حلول تمارين ومسائل (٢-٢)

١

أ مصفوفة الطالبات $\begin{bmatrix} ٣٢ \\ ٢٥ \\ ٢٢ \end{bmatrix}$ ، مصفوفة الطلاب $\begin{bmatrix} ٣٠ \\ ٢٠ \\ ١٦ \end{bmatrix}$

ب مجموع طلبة الفرع الزراعي في كلا المدرستين ٢٢+١٦ = $\boxed{٣٨}$ الطالبات – الطلاب

جـ $= \begin{bmatrix} ٣٢ \\ ٢٥ \\ ٢٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣٠ \\ ٢٠ \\ ١٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$

٢

$ج_{٥٢} = ٢أ_{٥٢} + ب_{٥٢} = ٢ \times ٩ + (-٨) = ١٨ - ٨ = \boxed{١٠}$

٣

أ $س + ص = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ & ٢ & ٦ \\ ٦ & ٥ & ١ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٦ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ & ٨ & ٥ & ٧ \\ ٨ & ٩ & ٧ & ١١ \end{bmatrix}$

ب $٣س - ٤ص = ٣\begin{bmatrix} ٨ & ٣ & ٢ & ٦ \\ ٦ & ٥ & ١ & ٣ \end{bmatrix} - ٤\begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٦ & ٨ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢٤ & ٩ & ٦ & ١٨ \\ ١٨ & ١٥ & ٣ & ٩ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢٨ & ٢٠ & ١٢ & ٤ \\ ٨ & ١٦ & ٢٤ & ٣٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & -١١ & -٦ & ١٤ \\ ١٠ & -١ & -٢١ & -٢٣ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

جـ $٥ص - س = ٥\begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٦ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ & ٣ & ٢ & ٦ \\ ٦ & ٥ & ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٧ & ٢٢ & ١٣ & -١ \\ ٤ & ١٥ & ٢٩ & ٣٧ \end{bmatrix}$

د لا يمكن لاختلاف رتب المصفوفتين.

هـ $٢ص - ٣و_{٢\times٤} = ٢ص = ٢\begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٦ & ٨ \end{bmatrix} - ٣\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & ١٠ & ٦ & ٢ \\ ٤ & ٨ & ١٢ & ١٦ \end{bmatrix}$

٤

$٣\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٦ & ٥ \end{bmatrix} - ٤\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -٣ & ٣ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ & ٦ & ٩ \\ ٣ & ١٨ & ١٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٨ & ١٢ \\ -١٢ & ١٢ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ & -٢ & -٣ \\ ١٥ & ٦ & ١٥ \end{bmatrix}$

⑤ $٢س = أ - ٣ب$

$$٢س = \begin{bmatrix} ٢ & -٧ \\ ٤ & ١ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix} - ٣\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٨ & ١ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٧ \\ ٤ & ١ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١٢ & ٠ \\ -٢٤ & -٣ \\ ٦ & -٢١ \end{bmatrix}$$

$$٢س = \begin{bmatrix} -١٠ & -٧ \\ -٢٠ & -٢ \\ ٤ & -٢٢ \end{bmatrix} \leftarrow س = \begin{bmatrix} \frac{-١٠}{٢} & \frac{-٧}{٢} \\ \frac{-٢٠}{٢} & \frac{-٢}{٢} \\ \frac{٤}{٢} & \frac{-٢٢}{٢} \end{bmatrix} \leftarrow س = \begin{bmatrix} -٥ & \frac{-٧}{٢} \\ -١٠ & -١ \\ ٢ & -١١ \end{bmatrix}$$

⑥ أ

$$س + ٣\begin{bmatrix} -١ & ٥ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$$

$$س + \begin{bmatrix} -٣ & ١٥ \\ ١٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ١٥ \\ ١٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & -٧ \\ -١٦ & -٢ \end{bmatrix}$$

ب

$$٢\left(س + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}\right) = س - ٢\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$$٢س + \begin{bmatrix} ٤ & -٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = س + \begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٠ & -١٠ \end{bmatrix}$$

$$٢س - س = \begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٠ & -١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & -٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \leftarrow س = \begin{bmatrix} -٦ & ١٠ \\ -٢ & -١٤ \end{bmatrix}$$

جـ

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٢ \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix} - ٢س = \begin{bmatrix} ٠ & -٦ \\ ٥ & ٠ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$-٢س = \begin{bmatrix} ٠ & -٦ \\ ٥ & ٠ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٢ \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & -١٠ \\ ٤ & -٢ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} \leftarrow س = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

ورقة عمل ٢ – ٢ العمليات على المصفوفات

أولاً إختر الإجابة الصحيحة

١) إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٤ & -٥ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة ب + و$_٢$ ؟

أ $\begin{bmatrix} ٢ & ٩ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ١ & ٨ \\ ٤ & -٦ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٤ & -٤ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٤ & -٥ \end{bmatrix}$

٢) إذا كانت جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ٦ & -٨ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة جـ – م$_٢$ ؟

أ $\begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ٦ & -٨ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ ٦ & -٩ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٦ & -٧ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٢ & -٦ \\ ٥ & -٨ \end{bmatrix}$

٣) إذا كانت المصفوفة س$_{٢×٣}$ ، فإن رتبة المصفوفة : ٤س$_{٢×٣}$ هي :

أ ٢×٣ ب ٣×٢ ج ٨×١٢ د ٢×١٢

٤) إذا كانت المصفوفة س من الرتبة ٣×٢ ، فإن رتبة المصفوفة ص بحيث ص + س$_{٢×٣}$ = ع$_{٢×٣}$

أ ٢×٣ ب ٢×٢ ج ٣×٢ د ٢×٣

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٥) إذا كانت جـ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، فإن (–جـ) + جـ =

أ م$_٢$ ب و$_٢$ ج صفر د $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

٦) إذا كانت ص = $\begin{bmatrix} ١ & -٣ & ٠ \\ -٨ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فإن ٣ ص =

أ $\begin{bmatrix} ٣ & -٩ & ٠ \\ -٢٤ & ١٥ & ١٢ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٠ \\ ٨ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} ٢ & -٦ & ٠ \\ -١٦ & ١٠ & ٨ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -٣ & ٩ & ٠ \\ ٢٤ & -١٥ & -١٢ \end{bmatrix}$

٧) إذا كانت ٢س = $\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & -٨ \end{bmatrix}$ ، فإن س =

أ $\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & -٨ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٨ & ١٢ \\ ٤ & -١٦ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$

٨) إذا كانت $\frac{١}{٣}\text{س} = \begin{bmatrix} -٣ & -٦ \\ ٣ & -٩ \end{bmatrix}$ ، فإن س =

أ $\begin{bmatrix} -٣ & -٦ \\ ٣ & -٩ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} -٣ & -٦ \\ ٣ & -٩ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -٩ & -١٨ \\ ٩ & -٢٧ \end{bmatrix}$

٩) إذا كانت $٣\text{ع} = \begin{bmatrix} ١٢ & -٣ \\ ٩ & ٦ \end{bmatrix}$ ، فإن ٢ع =

أ $\begin{bmatrix} ١٢ & -٣ \\ ٩ & ٦ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} ٨ & -٢ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٢٤ & -٦ \\ ١٨ & ١٢ \end{bmatrix}$

١٠) إذا كان $\text{س} = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٧ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{bmatrix} -٤ & ٥ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، وكانت ع = س + ص ، فما قيمة $٢(\text{ع}_{١٢} - ٣\text{ع}_{٢١})$ ؟

أ -١٦ ب ٨ ج ١٠ د ١٦

١١) إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{س} & ٥ \\ \text{س} & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{ص} & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ع} & ٥ \\ ٣ & \text{ص} \end{bmatrix}$ ، فإن قيمة ع ؟

أ ٣ ب ٥ ج ٢ د ٤

١٢) إذا كانت $\text{ب} = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$ ، فإن $٣\text{ب} - \text{ج} - ٤\left(\text{ب} - \frac{١}{٢}\text{ج}\right)$ تساوي:

أ $\begin{bmatrix} -٢ & ٦ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٢ & -٦ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} -٢ & ٦ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -٢ & -٦ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١٣) ما حل المعادلة المصفوفة ٢س + أ = ب ، إذا علمت أن: $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \\ -٦ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٤ \\ ٨ \end{bmatrix}$ ؟

أ $\begin{bmatrix} -١ \\ -١ \\ ٧ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ١ \\ ١ \\ -٧ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} -٢ \\ -٢ \\ ١٤ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٢ \\ -١٤ \end{bmatrix}$

١٤) فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

ما المصفوفة س بحيث: $٣\left(\text{س} - \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} - ٢\text{س}$ ؟

أ $\begin{bmatrix} -١ \\ ٥ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} ٤ \\ ٥ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$

١٥ قباطية: ٢٠١٩ تجريبي

إذا كانت: $٢س - ٢\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -٤ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فإن المصفوفة $(-س)$ هي:

أ $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٢ & -٨ \\ ٤ & ١٢ \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ -٢ & -٦ \end{bmatrix}$

١٦ خانيونس: ٢٠١٩ تجريبي

إذا كانت: $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & -٦ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، فإن المصفوفة $\frac{١}{٢}أ - ب =$ هي:

أ $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ -٤ & -٣ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -٣ \end{bmatrix}$

١٧ فلسطين: ٢٠١٨

إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} + س = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فإن المصفوفة س تساوي:

أ $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

١٨ فلسطين: ٢٠٢٠ إكمال

لتكن $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $٢أ + م_{٢×٢}$ ؟

أ $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٨ & ٣ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٨ & -١ \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -٧ & -٢ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٨ & -٢ \end{bmatrix}$

١٩ فلسطين: ٢٠٢٠

لتكن $٢أ = \begin{bmatrix} ٠ & -٤ \\ ٨ & ١ \end{bmatrix}$ ، فما هي المصفوف $-أ$ ؟

أ $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٤ & -٠,٥ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٠ & -٨ \\ ١٦ & ٢ \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} ٠ & ٨ \\ -١٦ & -٢ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٠ & -٢ \\ ٤ & ٠,٥ \end{bmatrix}$

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال		الجواب النهائي
١	إذا كانت س $= \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ص $= \begin{bmatrix} -٨ & ٨ \\ ٩ & ٦ \end{bmatrix}$ ، جد : أ) س + ص ب) ص − س جـ) ٣(ص − س) د) ٢س − ص	أ	$\begin{bmatrix} -١ & ١٣ \\ ٧ & ١٠ \end{bmatrix}$
		ب	$\begin{bmatrix} -١٥ & ٣ \\ ١١ & ٢ \end{bmatrix}$
		جـ	$\begin{bmatrix} -٤٥ & ٩ \\ ٣٣ & ٦ \end{bmatrix}$
		د	$\begin{bmatrix} ٢٢ & ٢ \\ -١٣ & ٢ \end{bmatrix}$
٢	إذا كانت ب $= \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ -٣ & -٧ \end{bmatrix}$ ، جد : أ) ٤ب + م$_٢$ ب) −٢جـ + و$_٢$	أ	$\begin{bmatrix} -٨ & ٩ \\ ١٣ & ٢٠ \end{bmatrix}$
		ب	$\begin{bmatrix} -٨ & -٢ \\ ٦ & ١٤ \end{bmatrix}$
٣	حل المعادلة المصفوفة: ٢س + $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٢ & ٦ \end{bmatrix}$ = س + ٢$\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ ٢ & -٨ \end{bmatrix}$
٤	حل المعادلة المصفوفة: ٤س + ٢$\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ٥ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$ = ٣س − ٣$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} -٧ & -١٣ \\ ٩ & -٨ \end{bmatrix}$
٥	حل المعادلة المصفوفة: −٣ (س + ٢$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$) = −٥س + $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} ٧ & ١١ \\ ١٢ & -٤ \end{bmatrix}$
٦	إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٣ \\ -٥ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة : ١٢أ − ٣ب − ١٣أ + ٤ب		$\begin{bmatrix} -٥ \\ -٦ \end{bmatrix}$
٧	إذا كان : $\begin{bmatrix} ٢س & ٥ \\ ص & ٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ -٦ & ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$ جد قيمة كل من : س ، ص ، ع		س = ٢ ص = ٤ ع = −٩

إعداد المعلم: سائد الحلاق

٨	إذا كانت: س = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$، جد المصفوفة ص حيث: $\frac{١}{٢}$ص + ٢س = $\begin{bmatrix} ١٦ & ١٢ \\ ١٠ & ٢٠ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ٢٠ & ١٦ \\ ٢٨ & ٢٤ \end{bmatrix}$
٩	حل المعادلة المصفوفية : ٢س − $و_٢$ = ٢$\left(\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} + \frac{١}{٢}س\right)$ + $م_٢$	$\begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$
١٠	إذا كانت ٢أ = $\begin{bmatrix} ٨ & ٦ & ٤ \\ ٠ & ٢ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $\frac{١}{٣}$ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ -٢ & ٦ & -١ \end{bmatrix}$ جد المصفوفة س حيث : س = ٢(ب + أ)	$\begin{bmatrix} ٢٦ & ١٨ & ١٠ \\ -١٢ & ٣٨ & -٨ \end{bmatrix}$
١١	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال حل المعادلة المصفوفية : س − ٣$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \\ ٦ & ٥ \end{bmatrix}$ = ٢$\begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ ٦ & ٠ \\ ١٢ & ٠ \end{bmatrix}$ − ٢س	$\begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ٨ & ٣ \\ ١٤ & ٥ \end{bmatrix}$
١٢	فلسطين : ٢٠٢٠ إذا كانت : أ = $\begin{bmatrix} -٣ & ٩ \\ -٦ & ١٢ \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٤ & -٦ \end{bmatrix}$، جـ = $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$ أثبت أن : $\frac{١}{٣}$أ − ب = ٢س	أثبت بنفسك
١٣	فلسطين : ٢٠٢٠ جد حل المعادلة المصفوفية: ٢$\left(س + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}\right)$ = س − ٣$\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -٧ & ١٢ \\ -٢ & -١٩ \end{bmatrix}$
١٤	فلسطين : ٢٠١٩ إكمال إذا كان : أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٦ & ٠ \\ ٠ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$ ، جد س بحيث : أ − ٢س = ب	$\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & -٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$
١٥	طولكرم : ٢٠١٩ تجريبي حل المعادلة المصفوفية : $\begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ + ٣$م_٢$ = س + $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -٢ & ٦ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

١٦	فلسطين : ٢٠١٧ إكمال ديسمبر حل المعادلة المصفوفة : $٣\left(س + \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}\right) = س + \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{١}{٢} & -٤ \\ -\frac{٣}{٢} & ٢ \end{bmatrix}$
١٧	فلسطين : ٢٠١٦ حل المعادلة المصفوفة : $٢س + \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix} - س$	$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & -١ \end{bmatrix}$
١٨	فلسطين : ٢٠١٤ إذا كانت المصفوفة : $أ = \begin{bmatrix} ٨ \\ -٢ \end{bmatrix}$ ، فجد المصفوفة ب بحيث $٣أ + ٢ب = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -١٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$
١٩	فلسطين : ٢٠١٣ إكمال حل المعادلة المصفوفية : $٢س - \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} = ٣\left(\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} - س\right)$	$\begin{bmatrix} ٠ & \frac{٢}{٥} \\ \frac{٨}{٥} & \frac{٤}{٥} \end{bmatrix}$
٢٠	فلسطين : ٢٠١١ إكمال حل المعادلة المصفوفية : $٣\left(٢س + \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}\right) = م_٢$	$\begin{bmatrix} -\frac{١}{٣} & -\frac{٣}{٢} \\ -١ & \frac{١}{٦} \end{bmatrix}$
٢١	فلسطين : ٢٠١٠ إذا كانت : $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & -٦ \end{bmatrix}$ ، وكانت $٢أ + س = م_٢$ ، أوجد المصفوفة س.	$\begin{bmatrix} -٥ & -٨ \\ -٤ & ١٣ \end{bmatrix}$
٢٢	فلسطين : ٢٠٠٩ إكمال حل المعادلة المصفوفية : $٢(س + [٢ \quad ٤]) = [٨ \quad ٢]$	$[٢ \quad -٣]$
٢٣	فلسطين : ٢٠٠٨ إذا كان $\begin{bmatrix} س & ٢ \\ ص & س \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ م & ص \end{bmatrix}$ ، فجد قيم كل من: س ، ص ، م س ، ص ، م التي تجعل المعادلة المصفوفية صحيحة	س = ٧ ص = ٩ م = ٨
٢٤	فلسطين : ٢٠٠٧ حل المعادلة المصفوفية : $٢س + \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ -٣ & -٤ \end{bmatrix} = $ صفر	$\begin{bmatrix} ١ & -٠,٥ \\ ١,٥ & ٢ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٢ – ٣ ضـــــرب المصفوفات

ملخص الدرس

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م×ن ، ب مصفوفة من الرتبة ن×ل فإن حاصل الضرب أ .ب = جـ حيث جـ مصفوفة مــن الرتبــة م×ل وتكون مدخلات المصفوفة جـ على النحو : أ م×ن ×ب ن×ل =جـ م×ل

ملاحظة

١) ليمكننا إجراء عملية ضرب مصفوفتين ، يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية.

٢) إذا أمكن إجراء ضرب مصفوفتين ،فإن المصفوفة الناتجة تكوون رتبتها عدد صفوف المصفوفة الأولى × عدد أعمدة المصفوفة الثانية

ملاحظة

قد يكون حاصل ضرب مصفوفتين غير صفريتين هو مصفوفة صفرية.

ملاحظة هامة جداً

إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات ، وكان أ . ب =أ. جـ

لا يسمح باختزال أ من الطرفين والقول أن : ب = جـ

خصائص عملية الضرب على المصفوفات

إذا كانت أ ، ب ، جـ بحيث عمليتي الجمع والضرب معرفتان ، م المصفوفة المحايدة ، ك ∈ ح فإن :

١) (أ ب) جـ = أ (ب جـ) .... { الخاصية التجميعية }

٢) أ . (ب + جـ) = أ .ب+أ .جـ........................... { توزيع الضرب على الجمع من اليمين }

٣) (أ+ ب) جـ = أ .جـ+ ب .جـ........................... { توزيع الضرب على الجمع من اليسار }

٤) أ . م = م . أ = أ... { المصفوفة المحايدة }

٥) ك(أ ب) = (ك أ) ب+أ(ك ب) ....

ملاحظة

١) عملية ضرب المصفوفات عملية غير إبدالية.

٢) المصفوفة م٢ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات من الرتبة الثانية ، وتسمى أيضاً مصفوفة الوحدة.

أمثلة محلولة

مثال ١

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، جد (إن أمكن) ناتج ضرب كل مما يلي: ١ س ص   ٢ ص س

الحل

نلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى س يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية ص (يمكن إجراء عملية الضرب س ص)

١ س ص = $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}_{2\times\boxed{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}_{\boxed{2}\times 1} = \begin{bmatrix} 3\times1+5\times4 \\ 1\times1+-6\times4 \end{bmatrix}_{2\times1} = \begin{bmatrix} 3+20 \\ 1+-24 \end{bmatrix}_{2\times1} = \begin{bmatrix} 23 \\ -23 \end{bmatrix}_{2\times1}$

لاحظنا أن المصفوفة الناتجة رتبتها (٢ × ١) تساوي عدد صفوف المصفوفة الأولى ضرب عدد أعمدة المصفوفة الثانية.

٢ ص س = $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}_{2\times1} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}_{2\times2}$ (لا يمكن إجراء عملية الضرب)

لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى س لا يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية ص

إعداد المعلم: سائد الحلاق

مثال ٢

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$ ، جد (إن أمكن) ناتج ضرب كل مما يلي: ١ أ ب   ٢ ب أ

الحل

١ (لا يمكن إجراء عملية الضرب أ ب)لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى أ لا يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية ب

٢ ب أ = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times\boxed{2}} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{\boxed{2}\times 2}$ (يمكن إجراء عملية الضرب)

$$= \begin{bmatrix} 1\times4+2\times-1 & 1\times2+2\times0 \\ 2\times4+-3\times-1 & 2\times2+-3\times0 \\ -5\times4+6\times-1 & -5\times2+6\times0 \end{bmatrix}_{3\times\boxed{2}} = \begin{bmatrix} 4+-2 & 2+0 \\ 8+3 & 4+0 \\ -20+-6 & -10+0 \end{bmatrix}_{3\times\boxed{2}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 11 & 4 \\ -26 & -10 \end{bmatrix}_{3\times\boxed{2}}$$

مثال ③

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، جد ① أ.ب ، ② ب أ إن أمكن .

الحـــل

① أ.ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$ ، ② ب.أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$

مصفوفة الوحدة ($م_٢$) هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات من الرتبة الثانية.

مثال ④

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، جد :

الحـــل

① ٣(أ.ب) = ٣ $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ = ٣ $\begin{bmatrix} -٧ & ٥ \\ -١٠ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢١ & ١٥ \\ -٣٠ & ١٨ \end{bmatrix}$

② ٣أ.٢ب = $\begin{bmatrix} ٦ & ٩ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ -٢ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤٢ & ٣٠ \\ -٦٠ & ٣٦ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

③ أ × -٢ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & -١٠ \\ ٢٠ & -١٢ \end{bmatrix}$

مثال ⑤

إذا كانت رتبة المصفوفة س هي ٢×٤ ، ورتبة المصفوفة ص هي ٤×٣ ، وكان ع = س×ص . ما رتبة المصفوفة ع؟

الحـــل

ع = $س_{\boxed{٢}\times ٤} \times ص_{٤\times \boxed{٣}}$

رتبة المصفوفة ع تكون عدد صفوف المصفوفة س في عدد أعمدة المصفوفة ص ، ومنها رتبة ع = ٢×٣

ضرب المصفوفات

حلول تمارين ومسائل (٢–٣)

١

أ

$$\begin{bmatrix} ٧ & ٤ & ٣ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٠ \\ -٥ & ٤ & -٢ \\ ١ & ٥ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٠ & ٥٢ & -٥ \end{bmatrix}$$

ب

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ١ \\ ٥ & -٤ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & -١ \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣٩ & ١١ \\ ٤ & ٣٣ \end{bmatrix}$$

٢

$$\begin{bmatrix} ١٠ & ١٧ & ١٥ & ١٢ \\ ٢٠ & ١٠ & ٢٠ & ١٦ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٤٥٠ \\ ٣٠٠ \\ ٥٠٠ \\ ٤٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠\times٤٥٠+١٧\times٣٠٠+١٥\times٥٠٠+١٢\times٤٠٠ \\ ٢٠\times٤٥٠+١٠\times٣٠٠+٢٠\times٥٠٠+١٦\times٤٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢١٩٠٠ \\ ٢٨٤٠٠ \end{bmatrix}$$

٣

أ

$$\text{أ}\times\text{ب} = \begin{bmatrix} -٧ & ٥ \\ ٤ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ \\ ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧\times٢+٥\times٦ \\ ٤\times٢+٢\times٦ \\ ٣\times٢+-١\times٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦ \\ ٢٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

$$٥(\text{أ}\times\text{ب}) = ٥\times \begin{bmatrix} ١٦ \\ ٢٠ \\ ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨٠ \\ ١٠٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

ب

$$٥\text{أ} = ٥\times \begin{bmatrix} -٧ & ٥ \\ ٤ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣٥ & ٢٥ \\ ٢٠ & ١٠ \\ ١٥ & -٥ \end{bmatrix}$$

$$(٥\text{أ})\times\text{ب} = \begin{bmatrix} -٣٥ & ٢٥ \\ ٢٠ & ١٠ \\ ١٥ & -٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ \\ ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣٥\times٢+٢٥\times٦ \\ ٢٠\times٢+١٠\times٦ \\ ١٥\times٢+-٥\times٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨٠ \\ ١٠٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

جـ

$$\text{أ}\times٥\text{ب} = \begin{bmatrix} -٧ & ٥ \\ ٤ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} \times ٥ \begin{bmatrix} ٢ \\ ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ٥ \\ ٤ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١٠ \\ ٣٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨٠ \\ ١٠٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

٤

$$\begin{bmatrix} \text{أ} & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \text{ب} \end{bmatrix}$$
(نجري عملية الضرب)

$$\begin{bmatrix} \text{أ}\times 3 + 1\times 1 \\ 2\times 3 + 3\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \text{ب} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3\text{أ} + 1 \\ 6 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \text{ب} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 3\text{أ} + 1 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \text{ب} \end{bmatrix}$$

من تساوي المصفوفتين ينتج أن:

$$\text{ب} = \boxed{9}$$

$$3\text{أ} + 1 = 4 \leftarrow \frac{3}{3}\text{أ} = \frac{3}{3} \leftarrow \text{أ} = \boxed{1}$$

٥

سؤال من كتاب الفترة الثانية :

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 5 \\ -3 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ وكانت: $2\text{أ} + \text{س} = 3\text{ب}$ ، أجد المصفوفة س

إعداد المعلم: سائد الحلاق

$$2\begin{bmatrix} 4 & 9 & 5 \\ -3 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix} + \text{س} = 3\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 18 & 10 \\ -6 & 14 & 4 \\ 8 & 2 & -6 \end{bmatrix} + \text{س} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & -3 \\ 12 & 3 & 9 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & -3 \\ 12 & 3 & 9 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 18 & 10 \\ -6 & 14 & 4 \\ 8 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -13 \\ 18 & -11 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

ورقة عمل ٢ – ٣ ضـــــــرب المصفوفات

أولاً إختر الإجابة الصحيحة

١) إذا كانت: ب = $\begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ -٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ج = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، فإن ب . ج =

أ $\begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ -٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} -٨ & -٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٥ & ٠ \end{bmatrix}$

٢) إذا كانت: س = $\begin{bmatrix} -٤ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فإن س × ص =

أ $\begin{bmatrix} ٦ & -١١ \\ ٧ & ١١ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٢ & -١١ \\ ٧ & ١١ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} -٢ & ١١ \\ ٧ & -١١ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -٢ & -١١ \\ ٧ & ١١ \end{bmatrix}$

٣) إذا علمت أن : ج = $\begin{bmatrix} -١ & ٤ & ١ \\ ٥ & ٠ & -٣ \\ -٢ & ٢ & ٦ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -١ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix}$ ، فإن $ج_{١٣} - ٢ج_{١٢} =$

أ صفر   ب -٨   ج -٢٤   د ٢٤

٤) إذا كانت: س ، ص ، ع مصفوفات بحيث : س=ص×ع ، وكانت رتبة ص = ٣×٣ ، ورتبة ع = ٣×٤
فإن رتبة المصفوفة ٢ س هي :

أ ٦×٤   ب ٣×٤   ج ٤×٣   د ٦×٨

٥) إذا كانت: س ، ص ، ع مصفوفات بحيث : ص×ع = س ، وكانت رتبة ، ورتبة ع = ٣×٣ ،
فإن رتبة المصفوفة ص هي :

أ ٢×٣   ب ٣×٢   ج ٣×٣   د ١×٣

٦) إذا كان: ناتج ضرب $\begin{bmatrix} ٦ \\ -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٦ & -١ \end{bmatrix}$ ينتج المصفوفة س ، فما نوع المصفوفة س؟

أ مربعة   ب صفية   ج سطرية   د صفرية

٧) إذا كانت: $أ_{١×٤}$ ، $ب_{٤×١}$ ، $ج_{١×١}$ ، فأي من العمليات التالية يمكننا إجراؤها ؟

أ أ × ب + ج   ب أ × ب - ج   ج ب × ج + أ   د ب × أ + ج

٨) إذا كانت: $\begin{bmatrix} س & -٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س + ٣ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة / قيم س التي تحقق صحة المعادلة المصفوفة؟

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٢، −٣ د) −٢، ٣

٩) إذا كان: ع مصفوفة حيث : ع × $\begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ ، فإن المصفوفة ع تساوي:

أ) $و_٢$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $م_٣$

١٠) إذا كان: س = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، وكانت ع = س × ص ، فما قيمة : ٣$(٢ع_{١٢} + ع_{٢١})$ ؟

أ) ٣ ب) −٣ ج) ٩ د) ١

١١) إذا كانت: $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & ٥ \\ ٢٢ & س \end{bmatrix}$ ، فما قيمة س؟

أ) ٦ ب) −٦ ج) ١٠ د) −١٠

١٢) ما مجموعة قيمة / قيم س التي تجعل : $\begin{bmatrix} -٣ & س \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٤ \\ س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \end{bmatrix}$ ؟

أ) {−٤، ٤} ب) {−٤} ج) {٤} د) {١٦}

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١٣) إذا كانت : أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٢ \\ -٤ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن رتبة ٢(أ × ب) هي:

أ) ٣×١ ب) ٢×٣ ج) ٣×٣ د) ٣×٢

١٤) فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كانت : أ ، ب ، جـ ثلاث مصفوفات، بحيث $أ_{٢×٣}$ ، $ب_{٣×٢}$ ، $جـ_{٢×٢}$ ، فما العملية المعرفة من الآتية ؟

أ) جـ × أ + ب ب) ب × أ + جـ ج) ب × جـ + أ د) أ × ب + جـ

١٥) شرق خانيونس: ٢٠١٩ تجريبي

إذا كانت: أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب مصفوفة من الرتبة ٢×٣ وكانت ب = أ × جـ ، فإن رتبة المصفوفة جـ هي :

أ) ٢×٢ ب) ٢×٣ ج) ٣×٢ د) لا يمكن تحديدها


١٦ طوباس : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كانت: جـ $= \begin{bmatrix} ٤ \\ -٢ \end{bmatrix}$ ، بحيث أن : $أ_{ن \times ٣} \times ب_{ي \times ١} =$ جـ ، فإن ن + ي =

أ ٢ ب ٣ جـ ٤ د ٥

١٧ رام الله : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كانت: أ $= \begin{bmatrix} -٥ & ٣ & ٢ \\ ٦ & ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ،وكان $أ \times ب_{م \times ن} = جـ_{٢ \times ٥}$ ، فإن قيمة م =

أ ٢ ب ٣ جـ ٥ د ٦

١٨ فلسطين : ٢٠١٥ إكمال

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٢×٣ ، ب من الرتبة ٣×٤ ، جـ من الرتبة ٢×٤ ،

فأي العمليات التالية معرفة على المصفوفات؟

أ ب أ + جـ ب أجـ + ب جـ جـ أ + ب د أ ب + جـ

١٨ فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كانت: أ ، ب ، جـ ثلاث مصفوفات،بحيث $أ_{٢ \times ٣}$ ،$ب_{م \times ن}$ ،$جـ_{٢ \times ٤}$ ،وكان أ × ب = جـ ، فما قيمة كل م،ن على الترتيب؟

أ ٢،٣ ب ٢،٤ جـ ٣،٤ د ٤،٣

إعداد المعلم سائد الحلاق

١٨ فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كان $\begin{bmatrix} ١ & س \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة س ؟

أ صفر ب ٤ جـ ٢ د ١

١٨ فلسطين : ٢٠١٨إكمال

إذا كان المصفوفتان أ،ب من الرتبة ٢ × ٣ ، فإن العملية غير الممكنة عليها من الآتية هي :

أ ٤أ ب أ + ب جـ أ – ب د أ × ب

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال		الجواب النهائي
١	إذا كان س = $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ ٤ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ -٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، جد الناتج إن أمكن :		
	أ) س × ص	أ	$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٠ & -١٢ & -٦ \end{bmatrix}$
	ب) ع × س	ب	$\begin{bmatrix} ١٥ & -٧ \\ ٢ & -٢ \\ ١٧ & -٧ \end{bmatrix}$
	جـ) ص × ع	جـ	$\begin{bmatrix} ١١ & ١٣ \\ ١٩ & ٤١ \end{bmatrix}$
	د) س × ع	د	لا يمكن (لاختلاف الرتب)
٢	إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & -١ \\ -٦ & ٥ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، جد الناتج إن أمكن :		
	أ) ب . ٢جـ	أ	$\begin{bmatrix} ١٤ & -٦ \\ -٦ & ٤ \\ ٦ & -٣٢ \end{bmatrix}$
	ب) ٢(-٣ب . جـ)	ب	$\begin{bmatrix} -٤٨ & ١٨ \\ ١٨ & -١٢ \\ -١٨ & ٩٦ \end{bmatrix}$
٣	إذا كانت : س × ص = $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٧ \end{bmatrix}$ ، س × ع = $\begin{bmatrix} ٨ \\ -٢ \end{bmatrix}$ ، أجد ناتج : س × (ص - ع)		$\begin{bmatrix} -٣ \\ ٩ \end{bmatrix}$
٤	إذا كان: $\begin{bmatrix} ب & ٠ \\ ٠ & جـ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ \\ ٨ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة كل من الثابتين: ب ، جـ ؟		ب = ٥ جـ = ٢
٥	إذا كان: $\begin{bmatrix} ٢ & س \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & -٢ \\ ص & -٤ \end{bmatrix} - و_٢$ ، ما قيمة كل من الثابتين : س ، ص ؟		س = -١ ص = ١١
٦	إذا كان: $\begin{bmatrix} ٣ & س & -١ \\ ٤ & ٠ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٧ \\ ٠ & ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة كل من الثابتين: س ، ص ؟		س = -١ ص = -٢

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٧	إذا كان : $\begin{bmatrix} س & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢س-١ \end{bmatrix}$ أوجد قيمة / قيم س.	س = −٣ س = +١
٨	أريحا : ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان : أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جد المصفوفة : س إذا علمت أن : $٢س + \begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٩ & ١ \end{bmatrix} = أ \times ب$	$\begin{bmatrix} \frac{١٩}{٢} & -١ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$
٩	الوسطى: ٢٠١٩ تجريبي ف٢ إذا كان : أ = $\begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & -٦ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، جد : ٢ أ × ب	$\begin{bmatrix} -٣٠ & ٣٦ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$
١٠	الخليل: ٢٠١٩ تجريبي ف١ إذا كانت : أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد: $\boxed{١}$ أ − ٢ ب $\boxed{٢}$ ب × أ	$\boxed{١}$ $\begin{bmatrix} ٧ & -٨ \\ -٢ & -٣ \end{bmatrix}$ $\boxed{٢}$ $\begin{bmatrix} -٦ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$
١١	فلسطين : ٢٠٠٨ إكمال إذا كان : أ = $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، فجد المصفوفة أ ب	$\begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ ٤ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$
١٢	فلسطين : ٢٠١١ إكمال إذا كان : أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٤ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد ب × أ	$\begin{bmatrix} ١ & -١٠ \\ ١٥ & ٦ \end{bmatrix}$
١٣	فلسطين : ٢٠١٥ إكمال إذا كان : أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ، فأوجد أ × ب	$\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٣ & ١١ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٢ – ٤ النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

أولاً : المحددات

ملخص الدرس

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، فإن محدد المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{bmatrix}$ هو عدد حقيقي ويرمز لهُ بالرمز | أ |

حيث : $|أ| = (أ_{١١} \times أ_{٢٢}) - (أ_{١٢} \times أ_{٢١})$

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} س_{٢١} & س_{١١} \\ س_{٢٢} & س_{١٢} \end{bmatrix}$ ، فإن $|س| = \begin{vmatrix} س_{٢١} & س_{١١} \\ س_{٢٢} & س_{١٢} \end{vmatrix} = (س_{١١} \times س_{٢٢}) - (س_{١٢} \times س_{٢١})$

أمثلة محلولة

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ١

إذا كانت : المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$. جد | أ |

الحل

$|أ| = (٥ \times ٣) - (٤ \times ٦) = ١٥ - ٢٤ = \boxed{-٩}$

مثال ٢

إذا كانت : المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$. جد | أ |

الحل

$|أ| = (٩ \times ٢) - (٦ \times ٣) = ١٨ - ١٨ = \boxed{٠}$

تعريف

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي صفر المصفوفة المنفردة

مثال ٣

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{-٤} & \text{٢ + س} \\ \text{-٨} & \text{٦} \end{bmatrix}$ ما قيمة س التي تجعل المصفوفة منفردة ؟

الحل

∵ أ مصفوفة منفردة

∴ | أ | = $\boxed{\text{٠}}$

← (-٤ × ٦) - (-٨ × (٢ + س)) = ٠

← -٢٤ - (-١٦ - ٨س) = ٠

← -٢٤ + ١٦ + ٨س = ٠

← -٨ + ٨س = ٠

← ٨س = ٨ (نقسم الطرفين على العدد ٨)

← س = $\boxed{\text{١}}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ٤

إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} \text{٣ص - ٢} & \text{١} \\ \text{٢} & \text{٢} \end{bmatrix}$ ما قيمة ص التي تجعل المصفوفة منفردة ؟

الحل

∵ ب مصفوفة منفردة

∴ | ب | = $\boxed{\text{٠}}$

← (٢(٣ص - ٢)) - (٢ × ١) = ٠

← (٦ص - ٤) - (٢) = ٠

← ٦ص - ٦ = ٠

← ٦ص = ٦ (نقسم الطرفين على العدد ٨)

← ص = $\boxed{\text{١}}$

مثال ٥

ما قيمة س الموجبة التي تجعل المصفوفة ج = $\begin{bmatrix} ٢٠ & س \\ س-١ & ١ \end{bmatrix}$ منفردة؟

الحـــل

∵ ج مصفوفة منفردة ← ∴ | ج | = $\boxed{٠}$

← (س(س − ١)) − (١ × ٢٠) = ٠

← س^{٢} − س − ٢٠ = ٠

← (س + ٤)(س − ٥) = ٠

إما : س + ٤ = ٠ ← س = −٤ مرفوض

أو : س − ٥ = ٠ ← $\boxed{\text{س} = +٥}$ مقبول (السبب : المطلوب قيمة س الموجبة)

مثال ٦

ما قيمة س السالبة التي تجعل المصفوفة ع = $\begin{bmatrix} -٤ & س \\ س & -٤ \end{bmatrix}$ منفردة؟

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الحـــل

∵ ع مصفوفة منفردة

∴ | ع | = $\boxed{٠}$

← (س × س) − (−٤ × −٤) = ٠

← س^{٢} − ١٦ = ٠

← س^{٢} = ١٦ (نأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

← س = ±٤

← س = $\boxed{-٤}$ مقبول (السبب : المطلوب قيمة س السالبة) ، +٤ مرفوض.

ملاحظة

إذا تساوت المدخلات المتناظرة في أي صفين أو عمودين في محدد فإن قيمة المحدد تساوي صفر.

أتعلم:

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، ك عدد حقيقي ، فإن $|\text{ك أ}| = \text{ك}^2\,|\text{أ}|$

مثال ٧

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكان $|\text{أ}| = ٥$، جد قيمة كل مما يأتي :

١) $٣\,|\text{أ}|$ ٢) $|٣\text{أ}|$ ٣) $٤\,|٢\text{أ}|$

الحل

١) $٣\,|\text{أ}| = ٣ \times ٥ = \boxed{١٥}$

٢) $|٣\text{أ}| = ٣^٢\,|\text{أ}| = ٩ \times ٥ = \boxed{٤٥}$

٣) $٤\,|٢\text{أ}| = ٤ \times ٢^٢\,|\text{أ}| = ١٦\,|\text{أ}| = ١٦ \times ٥ = \boxed{٨٠}$

مثال ٨

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكان $|٢\text{أ}| = ١٢$، جد قيمة كل مما يأتي :

١) $|\text{أ}|$ ٢) $٥\,|\text{أ}|$ ٣) $|٤\text{أ}|$

الحل

١) $|٢\text{أ}| = ١٢ \leftarrow ٢^٢\,|\text{أ}| = ١٢ \leftarrow ٤\,|\text{أ}| = ١٢ \leftarrow |\text{أ}| = \boxed{٣}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

٢) $٥\,|\text{أ}| = ٥ \times ٣ = \boxed{١٥}$

٣) $|٤\text{أ}| = ٤^٢\,|\text{أ}| = ١٦ \times ٣ = \boxed{٤٨}$

مثال ٩

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية ، وكان $|\text{أ} \times \text{ب}| = ٤٠$ ، $|٢\text{أ}| = ٨$ ، جد قيمة $|\text{أ}| + |\text{ب}|$.

الحل

$|٢\text{أ}| = ٨ \leftarrow ٢^٢\,|\text{أ}| = ٨ \leftarrow ٤\,|\text{أ}| = ٨ \leftarrow |\text{أ}| = \boxed{٢}$

$|\text{أ} \times \text{ب}| = |\text{أ}| \times |\text{ب}|$

$٤٠ = ٢ \times |\text{ب}|$

$|\text{ب}| = \frac{٤٠}{٢} = \boxed{٢٠}$

$|\text{أ}| + |\text{ب}| = ٢٠ + ٢ = \boxed{٢٢}$

ثانياً : النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

ملخص الدرس

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة مربعة غير منفردة من الرتبة الثانية ، فإن المصفوفة ب من الرتبة الثانية تسمى نظيراً ضربياً للمصفوفة أ إذا كان

أ.ب = ب.أ = $م_٢$ ، حيث $م_٢$ المصفوفة المحايدة.

ويرمز للنظير الضربي للمصفوفة أ بالرمز $أ^{-١}$. أي أن : أ . $أ^{-١}$ = $أ^{-١}$.أ = $م_٢$

تعريف :

المصفوفة المنفردة ليس لها نظير ضربي.

- | أ | = صفر ← لا يوجد نظير ضربي. (منفردة)
- | أ | ≠ صفر ← يوجد نظير ضربي. (ليست منفردة)

أمثلة محلولة

مثال ١

أي من المصفوفات التالية لها نظير ضربي؟

١) $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix}$ ٢) $ب = \begin{bmatrix} -١٠ & ٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$

الحـــل

١) $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٦ \end{vmatrix} = ١٢ - ١٢ = ٠$

∴ المصفوفة أ مصفوفة منفردة وليس لها نظير ضربي.

٢) $|ب| = \begin{vmatrix} -١٠ & ٢ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} = ٢ \times ٥ - ١ \times -١٠ = ١٠ + ١٠ = ٢٠$

∴ المصفوفة أ مصفوفة ليست منفردة ويوجد لها نظير ضربي.

تعريف :

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ حيث $|أ| \neq ٠$ ، مصفوفة غير منفردة ، فإن $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \begin{bmatrix} أ_{٢٢} & -أ_{١٢} \\ -أ_{٢١} & أ_{١١} \end{bmatrix}$

أي أن : $أ^{-١}$ تنتج من ضرب مقلوب محدد المصفوفة أ بالمصفوفة أ بعد تبديل أماكن مدخلات القطر الرئيسي للمصفوفة أ وتغيير إشارة مدخلات القطر الآخر من المصفوفة أ .

مثال ٢

جد النظير الضربي للمصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ١٠ & ٨ \end{bmatrix}$ إن أمكن .

الحـــل

أولاً نحسب محدد المصفوفة

$|أ| = (٦ \times ٨) - (١٠ \times ٥) = ٤٨ - ٥٠ = -٢ \neq ٠$ ، $\therefore$ يوجد للمصفوفة نظير ضربي.

$$أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ٨ & -٥ \\ -١٠ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & ٢,٥ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

أتعلم:

$$(أ^{-١})^{-١} = أ$$

مثال ٣

أوجد النظير الضربي إن وجد للمصفوفة $أ = \begin{bmatrix} -٢ & -٦ \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix}$

الحـــل

أولاً نحسب محدد المصفوفة/

$|أ| = (-٢ \times ٧) - (٢ \times -٦) = -١٤ + ١٢ = -٢ \neq ٠ \leftarrow \therefore أ^{-١}$ موجود.

$$أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ٧ & ٦ \\ -٢ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣,٥ & -٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$$

مثال ٤

أوجد النظير الضربي إن وجد للمصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ -٣ & -٩ \end{bmatrix}$

الحـــل

أولاً نحسب محدد المصفوفة

$|أ| = (٢ \times -٩) - (-٣ \times ٦) = -١٨ + ١٨ = ٠$ ، ∴ $أ^{-١}$ غيرموجود.

مثال ٥

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$: جد ما يلي:

١) $٦أ^{-١}$ ٢) $(٢ب)^{-١}$

الحـــل

١) أولاً نحسب محدد المصفوفة أ

$|أ| = (٤ \times ٣) - (-٣ \times -٣) = ١٢ - ٩ = ٣ \neq ٠$ ، ∴ $أ^{-١}$ موجود.

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$$أ^{-١} = \frac{١}{٣}\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & \frac{٤}{٣} \end{bmatrix}$$

$$\leftarrow ٦أ^{-١} = ٦ \times \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & \frac{٤}{٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٦ \\ ٦ & ٨ \end{bmatrix}$$

٢) أولاً نحسب $\leftarrow ٢ب = ٢ \times \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ١٠ & ٦ \end{bmatrix}$

$|٢ب| = (٤ \times ٦) - (١٠ \times ٢) = ٢٤ - ٢٠ = ٤ \neq ٠$ ، ∴ $(٢ب)^{-١}$ موجود.

ثم نحسب : $(٢ب)^{-١} = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ -١٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١,٥ & -٠,٥ \\ -٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$

أتعلم:

$(أب)^{-1} = ب^{-1} أ^{-1}$

مثال ٦

إذا كانت : $أ^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب^{-1} = \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جد : $٢(أ \times ب)^{-1}$

الحل

$٢(أ \times ب)^{-1} = ٢(ب^{-1} أ^{-1})$

$$= ٢\left(\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}\right) = ٢\begin{bmatrix} ١- & ٣- \\ ٦ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ٦- \\ ١٢ & ٤- \end{bmatrix}$$

مثال ٧

فلسطين : ٢٠١٥

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، جد : $(أ \times ب)^{-1}$

الحل

يوجد حلان للسؤال :

١) إيجاد ناتج ضرب $(أ \times ب)$ ثم إيجاد $(أ \times ب)^{-1}$

٢) إيجاب $(ب)^{-1}$ ثم إيجاد $(أ)^{-1}$ ، ثم إيجاد $(أ \times ب)^{-1} = ب^{-1} أ^{-1}$ (سنستخدم هذه الطريقة)

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$|أ| = (٣ \times ٢) - (٤ \times ١) = ٦ - ٢ = ٤ \neq ٠$ ، $\therefore أ^{-1}$ موجود.

$$أ^{-1} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$$

$|ب| = (١ \times ٥) - (٠ \times ٣) = ٥ - ٠ = ٥ \neq ٠$ ، $\therefore ب^{-1}$ موجود.

$$ب^{-1} = \frac{١}{٥}\begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$(أ \times ب)^{-1} = ب^{-1} أ^{-1} = \frac{١}{٥}\begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \times \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٥}\begin{bmatrix} ٢٢ & ١٤- \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢٢}{١٠} & \frac{١٤-}{١٠} \\ \frac{٤-}{١٠} & \frac{٣}{١٠} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١١}{٥} & \frac{٧-}{٥} \\ \frac{٢-}{٥} & \frac{٣}{١٠} \end{bmatrix}$$

أتعلم للمميزين:

$$(ك أ)^{-1} = \frac{1}{ك}(أ)^{-1}$$

مثال ٨

إذا كانت $أ^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب^{-1} = \begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ -٢ & ٦ \end{bmatrix}$ ، جد:

١) $(أ \times ب)^{-1}$ ٢) $(٢ب)^{-1}$ ٣) $(\frac{١}{٣}أ)^{-1}$

الحل

١) $(أب)^{-1} = ب^{-1}أ^{-1} = \begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ -٢ & ٦ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٨ & -٤ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

٢) $(٢ب)^{-1} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ -٢ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٤}{٢} & \frac{٨}{٢} \\ \frac{-٢}{٢} & \frac{٦}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

٣) $(\frac{١}{٣}أ)^{-1} = \frac{١}{\frac{١}{٣}} \times \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

$= ٣ \times \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & -٣ \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

مثال ٩

إذا كان : $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $(أ \times ب)^{-1} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد $ب^{-1}$

الحل

$\because ب^{-1}أ^{-1} = (أب)^{-1} \therefore ب^{-1}أ^{-1} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

بضرب الطرفين في أ من جهة اليسار

$ب^{-1}\boxed{أ^{-1} \times أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \times أ$

$ب^{-1} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \times أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & -٤ \\ ٧ & -٤ \end{bmatrix}$

ثالثاً : حل أنظمة المعادلات بطريقة النظير الضربي

خطوات حل أنظمة المعادلات بطريقة النظير الضربي

- نرتب المعادلات إن لزم ذلك.
- نكتبها على الصورة $\text{أ} \times \text{ع} = \text{جـ}$
- نجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات (أ)
- نضرب طرفي المعادلة من اليمين بالمصفوفة أ^{-1}

$$\text{أ}^{-1} . \text{أ} . \text{ع} = \text{أ}^{-1} . \text{جـ}$$

- نستخدم خاصية التجميع في ضرب المصفوفات فينتج:

$$(\text{أ}^{-1} . \text{أ}) . \text{ع} = \text{أ}^{-1} . \text{جـ}$$

- نستخدم خاصيتي النظير الضربي والمصفوفة المحايدة فينتج:

$$\text{م}_2 . \text{ع} = \text{أ}^{-1} . \text{جـ} \leftarrow \boxed{\text{ع} = \text{أ}^{-1} . \text{جـ}}$$

- نستخدم تساوي مصفوفتين فنحصل على قيمتي س ، ص.

الرموز

- أ : مصفوفة المعاملات.
- أ^{-1} : النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.
- ع: مصفوفة المتغيرات
- جـ: مصفوفة الثوابت.

حلاق

أمثلة محلولة

مثال ١

اكتب النظام الخطي المجاور على صورة معادلات مصفوفة:

$$2\text{س} + \text{ص} = 3$$
$$\text{س} - 3\text{ص} = -5$$

الحل

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

مثال ٢

حل النظام التالي باستخدام طريقة النظير الضربي:

٣س – ص = ٥

س = –٢ص – ٣

الحـــل

١) نرتب المعادلات : ٣س – ص = ٥
س + ٢ص = –٣

٢) نكتب المعادلات على الصورة :

$$\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ -٣ \end{bmatrix}$$

٣) نجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات:

$$|\text{أ}| = (٣ \times ٢) - (-١ \times ١) = ٦ + ١ = ٧$$

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{٧} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$$

٤) نستخدم ← $\boxed{\text{ع} = \text{أ}^{-١} \cdot \text{جـ}}$ ، الحل = النظير الضربي × مصفوفة الثوابت

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \frac{١}{٧} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ \\ -٣ \end{bmatrix}$$ (نجري عملية ضرب مصفوفتين)

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \frac{١}{٧} \times \begin{bmatrix} ٧ \\ -١٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٧}{٧} \\ \frac{-١٤}{٧} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -٢ \end{bmatrix}$$ (من تساوي مصفوفتين) ← $\boxed{\text{س} = ١}$ ، $\boxed{\text{ص} = -٢}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق


مثال ٣

استخدم طريقة النظير الضربي لحل النظام الآتي من المعادلات:

$$\text{س} + ٢\text{ص} = ٣$$

$$٢\text{ص} = -٢\text{س} + ٢$$

الحـــل

١) نرتب المعادلات : $\text{س} + ٢\text{ص} = ٣$ ، $٢\text{س} + ٢\text{ص} = ٢$ (ممكن قسمة المعادلة الثانية على العدد ٢)

٢) نكتب المعادلات على الصورة : $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix}$

٣) نجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات:

$$|\text{أ}| = (١ \times ٢) - (٢ \times ٢) = ٢ - ٤ = -٢$$

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{-٢}\begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٤) نستخدم ← $\boxed{\text{ع} = \text{أ}^{-١} . \text{ج}}$ ، الحل = النظير الضربي × مصفوفة الثوابت

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \frac{١}{-٢}\begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix}$$ (نجري عملية ضرب مصفوفتين)

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \frac{١}{-٢} \times \begin{bmatrix} ٢ \\ -٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{-٢} \\ \frac{-٤}{-٢} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$$ (من تساوي مصفوفتين) ← $\boxed{\text{س} = -١}$ ، $\boxed{\text{ص} = ٢}$

مثال ٤   غرب غزة : ٢٠١٩ تجريبي

استخدم طريقة النظير الضربي لحل النظام الآتي من المعادلات:

س − ص = −١

٣س + ٣ص = ٦

الحـــل

١) نختصر المعادلة الثانية وذلك بقسمة الطرفين على العدد ٣ فينتج أن : $\frac{\cancel{٣}}{\cancel{٣}}\text{س} + \frac{\cancel{٣}}{\cancel{٣}}\text{ص} = \frac{\cancel{٦}^{٢}}{\cancel{٣}_{١}} \leftarrow \text{س} + \text{ص} = ٢$

٢) نكتب المعادلات على الصورة : $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

٣) نجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات:

$$|\text{أ}| = (١ \times ١) - (١ \times -١) = ١ + ١ = ٢$$

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٤) نستخدم ← $\boxed{\text{ع} = \text{أ}^{-١} \,.\, \text{جـ}}$ ، الحل = النظير الضربي × مصفوفة الثوابت

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$$ (نجري عملية ضرب مصفوفتين)

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} \\ \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$$

(من تساوي مصفوفتين) ← $\boxed{\text{س} = \frac{١}{٢}}$ ، $\boxed{\text{ص} = \frac{٣}{٢} = ١{,}٥}$


مثال ٥

حل المعادلة المصفوفية : $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

الحـــل

أولاً : نفرض $أ = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

فتصبح المعادلة ← $أ \times س = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

ثانياً : نحسب النظير الضربي للمصفوفة أ أي نحسب $أ^{-1}$

$$|أ| = (3 \times 2) - (1 \times 4) = 6 - 4 = \boxed{2}$$

$$أ^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ثالثاً : نستخدم ← $\boxed{س = أ^{-1} . \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}}$ (نضرب $أ^{-1}$ في المعادلة من ناحية اليمين)

إعداد المعلم: سائد الحلاق

$$س = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$ (نجري عملية ضرب مصفوفتين)

$$س = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} -16 & -12 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} \frac{-16}{2} & \frac{-12}{2} \\ \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 5,5 & 5,5 \end{bmatrix}$$

مثال ٦

وزاري : س٥ فرع ب

حل المعادلة المصفوفية : $٢س \times \begin{bmatrix} ٥ & -٦ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٧ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

الحـــل

أولاً : نفرض $أ = \begin{bmatrix} ٥ & -٦ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$

فتصبح المعادلة ← $٢س \times أ = \begin{bmatrix} -١ & ٧ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

ثانياً : نحسب النظير الضربي للمصفوفة أ أي نحسب $أ^{-١}$

$|أ| = (٥ \times -٤) - (٣ \times -٦) = -٢٠ + ١٨ = \boxed{-٢}$

$أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$

ثالثاً : نستخدم ← $\boxed{٢س = \begin{bmatrix} -١ & ٧ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \times أ^{-١}}$ (نضرب $أ^{-١}$ في المعادلة من ناحية اليسار)

$٢س = \begin{bmatrix} -١ & ٧ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \times \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$ (نجري عملية ضرب مصفوفتين)

إعداد المعلم سائد الحلاق

$٢س = \frac{١}{-٢} \times \begin{bmatrix} -١ & ٧ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$ (ممكن وضع الكسر بعد المساواة سواء كان ضرب $أ^{-١}$ من اليمين أو اليسار)

$س = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{-٢} \times \begin{bmatrix} -١ & ٧ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$

$س = \frac{١}{-٤} \times \begin{bmatrix} -١ & ٧ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$

$س = \frac{١}{-٤} \times \begin{bmatrix} -١٧ & ٢٩ \\ -٨ & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١٧}{-٤} & \frac{٢٩}{-٤} \\ \frac{-٨}{-٤} & \frac{١٢}{-٤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١٧}{٤} & -\frac{٢٩}{٤} \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$

مثال ٧

حل المعادلة المصفوفية : $3\text{س} \times \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

الحل

نفرض أن $\text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow |\text{أ}| = (3\times1) - (-2\times-2) = 3 - 4 = \boxed{-1}$

$\leftarrow \text{أ}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$3\text{س} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ (نضرب أ^{-1} في المعادلة من ناحية اليسار)

$3\text{س} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}$

$\text{س} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} & -3 \end{bmatrix}$

مثال ٨

فلسطين : ٢٠٠٨

إذا كانت $\text{س} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\text{ع} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، بين أن : $\text{س} \times \text{ص} = 2\text{ع}^{-1}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الحل

أولاً: نجد الطرف الأيمن : $\text{س} \times \text{ص} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

ثانياً: نجد الطرف الأيسر : نجد ع^{-1} ثم نضربه بالعدد ٢

$\leftarrow |\text{ع}| = (1\times4) - (2\times1) = 4 - 2 = \boxed{2}$

$(\text{ع})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \leftarrow 2(\text{ع})^{-1} = 2\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

ثالثاً : نقارن بين الطرفين:

$\because \text{س} \times \text{ص} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $(\text{ع})^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\therefore$ (الطرفان متساويان)


النظير الضربي | حلول تمارين ومسائل (٢–٤)

١

$$\begin{vmatrix} -12 & 5 \\ 3\text{س} & -3 \end{vmatrix} = 6 \leftarrow (-12\times -3) - (3\text{س}\times 5) = 6$$

$$36 - 15\text{س} = 6 \leftarrow \frac{-15}{-15}\text{س} = \frac{-30}{-15} \leftarrow \text{س} = \boxed{2}$$

٢

$$|4\text{ب}| = -32 \leftarrow 4^2 \times |\text{ب}| = -32$$

$$\frac{16}{16}|\text{ب}| = \frac{-32}{16} \leftarrow |\text{ب}| = \boxed{-2}$$

$$|\text{ب}| + |3\text{ب}| = |\text{ب}| + 3^2 \times |\text{ب}|$$

$$= |\text{ب}| + 9|\text{ب}| = 10|\text{ب}| = 10 \times -2 = \boxed{-20}$$

٣

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \leftarrow |\text{أ}| = (3\times -3) - (-2\times 1) = -9 + 2 = \boxed{-7}$$

$$\leftarrow \text{أ}^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-1}{-7} \\ \frac{2}{-7} & \frac{3}{-7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \leftarrow |\text{ب}| = (5\times -2) - (4\times 0) = -10 - 0 = \boxed{-10}$$

$$\leftarrow \text{ب}^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{-10} & 0 \\ \frac{-4}{-10} & \frac{5}{-10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{جـ} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \leftarrow |\text{جـ}| = (4\times 3) - (6\times 2) = 12 - 12 = \boxed{0}$$

∵ المصفوفة منفردة ، ∴ ليس لها نظير ضربي

٤

أ) $$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

ب) $$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٥ أ

$$\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix} -١٣ & ٢٦ \\ ٣٩ & ١٣ \end{bmatrix}$$

نفرض أن $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} \leftarrow |أ| = (٣ \times ١) - (٥ \times -٢) = ١٣$

$$أ^{-١} = \frac{١}{١٣} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٥ & ٣ \end{bmatrix}$$

(نضرب $أ^{-١}$ في المعادلة من ناحية اليمين)

$$س = \frac{١}{١٣} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٥ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١٣ & ٢٦ \\ ٣٩ & ١٣ \end{bmatrix}$$

$$س = \frac{١}{١٣} \begin{bmatrix} ٦٥ & ٥٢ \\ ١٨٢ & -٩١ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} \frac{٦٥}{١٣} & \frac{٥٢}{١٣} \\ \frac{١٨٢}{١٣} & \frac{-٩١}{١٣} \end{bmatrix} \leftarrow س = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١٤ & -٧ \end{bmatrix}$$

ب

$$٢س \times \begin{bmatrix} ٥ & -٦ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٧ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

نفرض أن $أ = \begin{bmatrix} ٥ & -٦ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} \leftarrow |أ| = (٥ \times -٤) - (٣ \times -٦) = -٢$

$$أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$$

(نضرب $أ^{-١}$ في المعادلة من ناحية اليسار)

$$٢س = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} -١ & ٧ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$س = \frac{١}{-٤} \begin{bmatrix} -١٧ & ٢٩ \\ -٨ & ١٢ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} \frac{-١٧}{-٤} & \frac{٢٩}{-٤} \\ \frac{-٨}{-٤} & \frac{١٢}{-٤} \end{bmatrix} \leftarrow س = \begin{bmatrix} \frac{١٧}{٤} & -\frac{٢٩}{٤} \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$$

٦

أ

$\begin{bmatrix}٢&-١\\١&٢\end{bmatrix}\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-٧\\-١\end{bmatrix}$ ، نفرض أن $أ=\begin{bmatrix}٢&-١\\١&٢\end{bmatrix}$

$|أ|=(٢\times٢)-(١\times-١)=\boxed{٥}$

نحسب النظير الضربي للمصفوفة أ أي نحسب $أ^{-١}$

$$أ^{-١}=\frac{١}{٥}\times\begin{bmatrix}٢&١\\-١&٢\end{bmatrix}$$

(نضرب $أ^{-١}$ في المعادلة من ناحية اليمين) $\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}=\frac{١}{٥}\times\begin{bmatrix}٢&١\\-١&٢\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-٧\\-١\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}=\frac{١}{٥}\begin{bmatrix}-١٥\\٥\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-٣\\١\end{bmatrix}$$

$س=\boxed{-٣}$ ، $ص=\boxed{١}$

ب

$٢س-٣ص=١٣$
$-س+ص=-٦$ ← $\begin{bmatrix}٢&-٣\\-١&١\end{bmatrix}\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}١٣\\-٦\end{bmatrix}$

نفرض أن $أ=\begin{bmatrix}٢&-٣\\-١&١\end{bmatrix}$ ← $|أ|=(٢\times١)-(-١\times-٣)=٢-٣=\boxed{-١}$

$$أ^{-١}=\frac{١}{-١}\times\begin{bmatrix}١&٣\\١&٢\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-١&-٣\\-١&-٢\end{bmatrix}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

(نضرب $أ^{-١}$ في المعادلة من ناحية اليمين) ← $\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-١&-٣\\-١&-٢\end{bmatrix}\begin{bmatrix}١٣\\-٦\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}س\\ص\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٥\\-١\end{bmatrix}$$

$س=\boxed{٥}$ ، $ص=\boxed{-١}$

٧

ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix}٥&٢س+١\\٩&٤\end{bmatrix}$ منفردة؟ (سؤال من كتاب الفترة الثانية)

$\begin{vmatrix}٥&٢س+١\\٩&٤\end{vmatrix}=٠$ $\qquad$ $٢٠-(١٨س+٩)=٠$

$٢٠-١٨س-٩=٠$ ← $\frac{-١٨س}{-١٨}=\frac{-١١}{-١٨}$ ← $س=\boxed{\frac{١١}{١٨}}$

ورقة عمل ٢ – ٤ النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

أولاً إختر رمز الإجابة الصحيحة

(١) إذا كانت: س = $\begin{bmatrix} ٨ & ٥ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، فإن |س| = ...

أ ١٨ ب ١ ج –٢ د ٢

(٢) إذا كانت: ص = $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، فإن: ٢ |ص| = ...

أ ٥ ب –٥ ج ١٠ د –١٠

(٣) إذا كانت: أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٨ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فإن |٢أ| = ...

أ ١ ب –٤ ج ٤ د ٢

(٤) إذا كانت: أ = $\begin{bmatrix} ٤ & -٤ \\ -٨ & ٦ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ٦ & -٤ \end{bmatrix}$ ، فإن $\frac{١}{٣}$|أ + ب| = ...

أ ٦ ب –٦ ج ٢ د –٢

إعداد المعلم : سائد الحلاق

(٥) إذا كانت: أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٦ & -٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فإن |أ| + |ب| = ...

أ ٣ ب –٢ ج –٣ د –٢٤

(٦) إذا كانت: أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$ ، فإن |أ| × |ب| = ...

أ ٢ ب –٢ ج –٣ د –٢٤

(٧) إذا كانت: أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فإن |أ × ب| = ...

أ ٤ ب –٤ ج –٣ د ٣

٨ إذا كانت: أ = $\begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ١١ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فإن فإن $\frac{١}{٢}|أ| - |٢ب| = ...$

أ -٥ ب ٥ جـ -٣ د ٣

٩ إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكان $|أ| = ٤$ ، فإن $|٣أ| = ...$

أ ١٢ ب ٣٦ جـ ٢٤ د -٣٦

١٠ إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكان $|٢أ| = ١٢$ ، فإن $|أ| = ...$

أ -٣ ب ٤ جـ ٦ د ٣

١١ إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكان $|-٣أ| = ١٨$ ، فإن $|٢أ| = ...$

أ ٨ ب ٤ جـ -٤ د -٨

١٢ أي من المصفوفات التالية مصفوفة منفردة؟

أ $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٥ & ٥ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٤ & -٨ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٩ & ١٢ \\ -٣ & -٤ \end{bmatrix}$

١٣ أي من المصفوفات التالية ليست مصفوفة منفردة؟

أ $\begin{bmatrix} -١٠ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} -٣ & ٦ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} ٤ & -١٠ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -٢ & -٦ \\ -٥ & ١٥ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١٤ أي من المصفوفات التالية لها نظير ضربي؟

أ $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤ & ٨ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -٦ & ١٢ \\ ٤ & -٨ \end{bmatrix}$

١٥ ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ س & ٣ \end{bmatrix}$ منفردة ؟

أ -٢ ب ٢ جـ ١٢ د -١٢

١٦ إذا كانت أ مصفوفة ثنائية من الرتبة الثانية ، فأي من العبارات التالية صحيحة ؟

أ $|\frac{١}{٢}أ| = ٤أ$ ب $|-\frac{١}{٢}أ| = \frac{١}{٤}أ$ جـ $\frac{١}{٤}أ = |\frac{١}{٢}أ|$ د $|-\frac{١}{٤}أ| = -\frac{١}{١٦}أ$

١٧ إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، فإن $س^{-١} \times س = ...$

أ $م_٣$ ب $م_٢$ جـ $و_٢$ د واحد صحيح

١٨) إذا كانت $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٣س+٢ & ٥ \end{vmatrix} = ١$ ، فما قيمة س ؟

أ) ٢ ب) ٤ جـ) −٢ د) ١٢

١٩) إذا كانت : س = $\begin{bmatrix} ٣ & −٣ \\ −٦ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فإن $س^{−١}$ =

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & \frac{٥}{٣} \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} \frac{٥}{٣} & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & −١ \\ −٢ & \frac{٥}{٣} \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} −١ & −٢ \\ −١ & −\frac{٥}{٣} \end{bmatrix}$

٢٠) إذا كانت : س = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فإن $٢(س^{−١})$ =

أ) $\begin{bmatrix} −١ & ٣ \\ ٢ & −٥ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} −٢ & ٦ \\ ٤ & −١٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & ١٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} −٢ & ٤ \\ ٦ & −١٠ \end{bmatrix}$

٢١) إذا كانت ص = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة ٣|٢ص| ؟

أ) −٦ ب) −١٢ جـ) −٢٤ د) ٢٤

٢٢) إذا كانت ص = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، ما المصفوفة س حيث ص × س = $م_٢$ ؟

إعداد المعلم : سائد الحلاق

أ) $\begin{bmatrix} ١ & −٢ \\ −٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} −٥ & ٢ \\ ٣ & −١ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} −٥ & ٣ \\ ٢ & −١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

٢٣) إذا كان |أ| = −٢ ، فما قيمة |أ × $أ^{−١}$| ؟

أ) ١ ب) م جـ) ٢ د) $\frac{١}{٢}$

٢٤) إذا كان |أ| = ٤ ، |ب| = −٤ ، فما قيمة |أ × ب| ؟

أ) م ب) ١٦ جـ) −١٦ د) ١

٢٥) إذا كان |أب| = ٢٠ ، |ب| = ٥ ، فما قيمة |٢أ| ؟

أ) ٤ ب) ٨ جـ) ١٢ د) ١٦

٢٦) إذا كان : أ ، ب مصفوفتان ثنائيتان بحيث : |أ| − |ب| = ١٠ ، |−٣أ| = ٩ ، فما قيمة |ب| ؟

أ) −٨ ب) ٨ جـ) −٩ د) −٧

(٢٧) إذا كان : س ، ص مصفوفتان ثنائيتان ، فأي من العبارات التالية ليست خاطئة ؟

أ) $\text{س}^{-1} + \text{ص}^{-1} = (\text{س} + \text{ص})^{-1}$ ب) $\text{س}^{-1}\,\text{ص}^{-1} = (\text{س}\text{ص})^{-1}$

جـ) $|\text{س} \times \text{ص}| = |\text{ص} \times \text{س}|$ د) $|\text{س} \times \text{ص}| = |\text{س}| \times |\text{ص}|$

فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

(٢٨) إذا كان : أ مصفوفة مربعة من الرتبة ، وكانت $|٢\text{أ}| = ٨$ ، فما قيمة $\left|\frac{١}{٢}\text{أ}\right|$ ؟

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) ١   جـ) ٢   د) ٤

فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

(٢٩) ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ - \text{س} & ١ \\ \text{س} & ٢ \end{bmatrix}$ منفردة؟

أ) صفر   ب) -٢ جـ) ٢   د) ٦

فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

(٣٠) إذا كانت $\text{أ} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٩ & ٧ \end{bmatrix} = \text{م}_٢$ ، حيث $\text{م}_٢$ المصفوفة المحايدة ، فما هي المصفوفة أ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٧ & -٤ \\ -٩ & ٥ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -٧ & ٤ \\ ٩ & -٥ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} -٧ & -٤ \\ -٩ & -٥ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٥ & -٤ \\ -٩ & ٧ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

فلسطين : ٢٠١٩

(٣١) إذا كان : أ مصفوفة مربعة من الرتبة ، وكانت $|-\text{أ}| = -١٢$ ، فما قيمة $\left|\frac{١}{٢}\text{أ}\right|$ ؟

أ) ٦   ب) -٣ جـ) -٦ د) ٣

فلسطين : ٢٠١٩

(٣٢) إذا كانت $\begin{vmatrix} -١٢ & ٣ \\ ٢\text{س} & -٣ \end{vmatrix} = ٦$ ، فما قيمة س ؟

أ) ٥   ب) ٦   جـ) ٧   د) -٥


فلسطين : ٢٠١٩

(٣٣) إذا كانت $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، فما هي المصفوفة أ؟

أ) $\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} -٤ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ب) $٢\begin{bmatrix} -٤ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ جـ) $\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ د) $-٢\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$

فلسطين : ٢٠١٨ إكمال ديسمبر

(٣٤) إذا كان: أ مصفوفة غير منفردة ، بحيث: $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = أ \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$ ، فإن المصفوفة أ =

أ) $\begin{bmatrix} -٣ & -٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

فلسطين : ٢٠١٧ إكمال ديسمبر

(٣٥) المصفوفات التي لا يمكن إيجاد النظير الضربي لها من المصفوفات الآتية هي:

أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ -٣ & -٦ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

شرق خانيونس : ٢٠١٩ تجريبي

(٣٦) إذا كان: $\begin{bmatrix} -٧ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ \\ ٥ \end{bmatrix} \times ٢س$ ، فإن المصفوفة س تساوي:

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & ٠ \end{bmatrix}$

شرق خانيونس : ٢٠١٩ تجريبي

(٣٧) إذا كان: $أ = \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فإن المصفوفة $\left(أ^{-١}\right)^{-١}$ = تساوي:

أ) $\begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٧ & -٥ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

غرب خانيونس : ٢٠١٩ تجريبي

(٣٨) إذا كان: س = $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكان |كس| = −٤ ، فإن قيمة الثابت ك تساوي:

أ) ١ ب) ٢ ج) −٢ د) ±٢

رام الله : ٢٠١٩ تجريبي

(٣٩) إذا كانت ب = ٣أ$^{-١}$ ، فما هي المصفوفة التي تمثل أ × ب؟

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٣ & ٠ \end{bmatrix}$

فلسطين : ٢٠٢٠

(٤٠) إذا كانت: $\begin{vmatrix} ١ & ٦ \\ ٣ & (س-١) \end{vmatrix}$ = −١١ ، فما قيمة س ؟

أ) ٨ ب) ٣٠ ج) ٢ د) ١

فلسطين : ٢٠٢٠

(٤١) إذا كانت : ب = أ$^{-١}$ ، فما هي المصفوفة التي تمثل أ×ب ؟

إعداد المعلم : سائد الحلاق

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٣ & ٠ \end{bmatrix}$

فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

(٤٢) إذا كانت : ص = $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، وكانت ص$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ -١ & ج \end{bmatrix}$ ، فما قيمة الثابت ج ؟

أ) −٥ ب) ٥ ج) −١ د) ١

فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

(٤١) إذا كانت : أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة |٢أ| ؟

أ) ١٢ ب) ٢٦ ج) ٦ د) −١٢

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال		الجواب النهائي
١	إذا كان أ = $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٣ & -٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، جد ما يلي إن أمكن : أ $٣(أ^{-١})$ ب $(٢ب)^{-١}$ جـ $(أب)^{-١}$	أ ب جـ	$\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -٠,٥ & ١,٥ \\ ١ & -٢,٥ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \frac{٥}{٣} & ٢ \\ -\frac{٧}{٣} & -٣ \end{bmatrix}$
٢	إذا كانت $\|أب\| = ٢٤$ ، كان $\|٣ب\| = ٥٤$ ، جد ما يلي : أ $\|أ\|$ ب $\|٢أ\| + ٢\|أ\|$ جـ $\frac{١}{٢}\|-٢أ ب\|$ د $\|-٣أ\| \times \|\frac{١}{٢}ب\|$	أ ب جـ د	$\|أ\| = ٤$ ٢٤ ٤٨ ٥٤
٣	إذا كان أ = $\begin{bmatrix} -١ & -٤ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٣ & -٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد ما يلي إن أمكن : أ $ب^{-١}$ ب $(أ - ب)^{-١}$	أ ب	$\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٥ & -٢ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -٣ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$
٤	إذا كان ٤س = $\begin{bmatrix} ٠ & -٤ \\ ٤ & -١٢ \end{bmatrix}$ ، وكان $\|٢ص\| = -١٢$ حيث ص مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية . جد $\|س ص\|$		$\|ص\| = -٣$ $\|س\| = -١$ $\|س ص\| = ٣$
٥	إذا كان ص = $\begin{bmatrix} -٢ & س \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، وكان $\|٢ص\| = ٢٤$ ، جد قيمة/قيم س.		س = −١
٦	إذا كانت : س = $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$ ، أثبت أن : $\|س\| = ٤\|س^{-١}\|$		أثبت بنفسك
٧	إذا كان: أ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ -٢ & -٥ \end{bmatrix}$ ، أثبت أن : ب × أ = $٢جـ^{-١}$		أثبت بنفسك
٨	إذا كان: $\begin{vmatrix} ٣ & س \\ (١ - س) & -١ \end{vmatrix} = ١$ ، جد قيمة / قيم س.		س = ٢ س = −١

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٩	إذا كان: $\begin{vmatrix} ٣ & -٩ \\ ٦ & (س-٣) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س^{٢} & ٣ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$ ، جد قيمة / قيم س.	س = ٩ س = −٦
١٠	حل المعادلة المصفوفية التالية: $٣س \times \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{٢}{٣} & \frac{٤}{٣} \\ -\frac{٥}{٣} & -٣ \end{bmatrix}$
١١	حل المعادلة المصفوفية التالية: $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times ٢س = \begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -٤ & -٣ \\ \frac{١١}{٤} & \frac{١١}{٤} \end{bmatrix}$
١٢	إذا كان $(أب)^{-١} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكان $أ^{-١} = \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ، جد $ب^{-١}$	$\begin{bmatrix} ٢٨ & ٧ \\ -١٦ & -٤ \end{bmatrix}$
١٣	إذا كان : $أ \times ب = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $أ \times جـ = \begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ،أجد $أ(جـ - ب)$	$\begin{bmatrix} -١ & -٦ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$
١٤	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال إذا كان $س^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ص \times س - \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = م_{٢}$ جد المصفوفة ص .	$\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١٤ \end{bmatrix}$
١٥	فلسطين : ٢٠٢٠ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} -١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جد $\lvert أ \times ب \rvert$	٣٢
١٦	فلسطين : ٢٠٢٠ استخدم طريقة النظير الضربي لحل نظام المعادلات: $٢س + ص = ١$ ، $س + ٧ = ٢ص$	س = −١ ص = ٣
١٧	فلسطين : ٢٠١٩إكمال حل المعادلة المصفوفية : $٢ س \times \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ١ & -\frac{٣}{٢} \\ -\frac{٥}{٢} & -٤ \end{bmatrix}$
١٨	فلسطين : ٢٠١٩ جد المصفوفة ص التي تحقق المعادلة: $\begin{bmatrix} -٤ & -٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} - ٣م_{٢} = ص \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -٦ & -\frac{١}{٢} \\ ٦ & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١٩	**بيت لحم : ٢٠١٩ تجريبي** إذا كانت: $أ^{-1} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٢ & ٧ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$ حل المعادلة المصفوفية : $أ^{-1} \times (م_٢ + أ س) = ب$	$\begin{bmatrix} -٣ & ٩ \\ -٧ & ٠ \end{bmatrix}$
٢٠	**رام الله : ٢٠١٩ تجريبي** حل المعادلة المصفوفية : $\begin{bmatrix} -٤ & ٤ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \times ٢س = \begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ ١٠ & ٠ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٦} \\ ١ & -\frac{١}{١٢} \end{bmatrix}$
٢١	**رفح : ٢٠١٩ تجريبي** ما هي قيمة/قيم س التي تحقق المعادلة: $٣\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} + س^٢ = \begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ س & ٦ \end{vmatrix}$ ؟	س = ٣ ، ١
٢٢	**فلسطين : ٢٠١٩ إكمال ديسمبر** أوجد المصفوفة س التي تحقق المعادلة : $٥ \times \begin{bmatrix} ٦ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = ٢س + م_٢$	$\begin{bmatrix} ١٥ & -٨ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$
٢٣	**فلسطين : ٢٠١٩ إكمال ديسمبر** استخدم طريقة النظير الضربي لحل نظام المعادلات : $٢س + ص = ٤$ ، $٥س - ٢ص = ١$	س = ١ ص = ٢
٢٤	**فلسطين : ٢٠١٦** إذا كانت : $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٦ & -٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$ ، فجد $ب\ أ^{-1}$	$\begin{bmatrix} -\frac{٢}{٣} & ٤ \\ -\frac{١}{٣} & -٤ \end{bmatrix}$
٢٥	**فلسطين : ٢٠١٤** إذا كانت : $أ = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، فجد ١ $\|أ \times ب\|$ ٢ $\|أ + ٢ب\|$	١ −٢٠ ٢ −١٩

إعداد المعلم : سائد الحلاق
مدرسة الثانوية ... أ. سائد الحلاق

٢٦	فلسطين : ٢٠١٤ إذا كانت : س $^{-1}$ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، س ع $^{-1}$ = ص ، فجد ع	$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$
٢٧	فلسطين : ٢٠١٤ إكمال إذا كانت : س ع $^{-1}$ = ص ، ص = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، فجد س $^{-1}$	$\begin{bmatrix} -\frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{١٢} & -\frac{١}{١٢} \end{bmatrix}$
٢٨	فلسطين : ٢٠١٢ إذا كانت : أ = $\begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ وكانت |−٢أ| = ١٢ ، جد قيمة س	س = ٠,٥
٢٩	فلسطين : ٢٠١١ إذا كانت: ب $^{-1}$ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، وكان ب × أ − $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ = و $_{٢}$ ، جد المصفوفة أ	$\begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ -١٢ & -٥ \end{bmatrix}$
٣٠	فلسطين : ٢٠١٠ إذا كانت: أ = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جد: ١ أ $^{-1}$ ٢ |أ×ب| $^{-1}$ إعداد المعلم سائد الحلاق	١ $\begin{bmatrix} \frac{١}{٨} & \frac{٣}{٨} \\ \frac{٢}{٨} & -\frac{٢}{٨} \end{bmatrix}$ ٢ ١٦
٣١	فلسطين : ٢٠٠٩ إذا كانت: أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ جد: (٢أ) $^{-1}$	$\begin{bmatrix} -\frac{١}{١٤} & \frac{٣}{١٤} \\ \frac{١}{٧} & \frac{١}{١٤} \end{bmatrix}$
٣٢	فلسطين : ٢٠٠٧ حل النظام التالي باستخدام النظير الضربي: س = ص + ١ ٢س + ص = ٢	س = ١ ، ص = ٠
٣٣	فلسطين: ٢٠٠٧ إكمال إذا كان : $\begin{vmatrix} ٤ & س \\ س-١ & ٣ \end{vmatrix}$ = −١٠ ، فما قيمة/قيم س؟	−١ ، ٢

٢ – ٥ حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كريمر

ملخص الدرس

قاعدة كريمر

تستخدم طريقة كريمر لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، والذي يمكن كتابتهُ بالصورة المصفوفية كالآتي : أ . ع = جـ ، حيث:

- أ : مصفوفة المعاملات.
- ع: مصفوفة المتغيرات
- جـ: مصفوفة الثوابت. |أ| ≠ ٠ ، فيكون:

$$\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} \quad \text{و} \quad \text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|}$$

$\text{أ}_{\text{س}}$: المصفوفة أ بعد استبدال مدخلات عمود معملات س فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

$\text{أ}_{\text{ص}}$: المصفوفة أ بعد استبدال مدخلات عمود معملات ص فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

خطوات حل أنظمة المعادلات الخطية بطريقة كريمر

- نرتب المعادلات إن لزم ذلك.
- نكتبها على الصورة أ س + ب ص = جـ
- نكتب نظام المعادلات على الصورة أ.ع = جـ
- نجد |أ|
- نجد $|\text{أ}_{\text{س}}|$ ثم $|\text{أ}_{\text{ص}}|$
- لإيجاد قيمة س نستخدم : $\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|}$
- لإيجاد قيمة ص نستخدم : $\text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|}$

علاقات

- $|\text{أ}_{\text{س}}| = \text{س} \times |\text{أ}|$
- $|\text{أ}| = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{\text{س}}$
- $|\text{أ}_{\text{ص}}| = \text{ص} \times |\text{أ}|$
- $|\text{أ}| = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{\text{ص}}$

أمثلة محلولة

مثال ١

استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{aligned} \text{ص} + ٢\text{س} &= ٢ \\ \text{س} - ٣\text{ص} - ١٥ &= ٠ \end{aligned}$$

الحل

١) نرتب المعادلات : $٢\text{س} + \text{ص} = ٢$ ، $\text{س} - ٣\text{ص} = ١٥$

٢) نكتب المعادلات على الصورة (أ . ع = ج) : $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١٥ \end{bmatrix}$

٣) نفرض أ مصفوفة المعاملات $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$

٤) نجد : $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} = (٢ \times -٣) - (١ \times ١) = -٦ - ١ = \boxed{-٧}$

٥) نجد : $|\text{أ}_{\text{س}}|$ من خلال استبدال العمود الأول (الممثل لمعاملات س) بعمود مصفوفة الثوابت ، فينتج :

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$$|\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١٥ & -٣ \end{vmatrix} = (٢ \times -٣) - (١٥ \times ١) = -٦ - ١٥ = \boxed{-٢١}$$

٦) نجد : $|\text{أ}_{\text{ص}}|$ من خلال استبدال العمود الثاني (الممثل لمعاملات ص) بعمود مصفوفة الثوابت ، فينتج :

$$|\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ١٥ \end{vmatrix} = (٢ \times ١٥) - (١ \times ٢) = ٣٠ - ٢ = \boxed{٢٨}$$

٧) نحسب قيمة س من خلال : $\text{س} = \dfrac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \dfrac{-٢١}{-٧} = \boxed{٣}$

٨) نحسب قيمة ص من خلال : $\text{ص} = \dfrac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \dfrac{٢٨}{-٧} = \boxed{-٤}$

الحل : $(\text{س} ، \text{ص}) = (٣ ، -٤)$

مثال ٢

جد حل المعادلة المصفوفية التالية بطريقة كريمر:

$$\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ -٦ \end{bmatrix}$$

الحـــل

١) نفرض أن : $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix}$ مصفوفة أ

٢) نجد : $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -٢ \end{vmatrix} = (١ \times -٢) - (٢ \times ٣) = -٢ - ٦ = \boxed{-٨}$

٣) $|أ_س| = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ -٦ & -٢ \end{vmatrix} = (٥ \times -٢) - (-٦ \times ٣) = -١٠ + ١٨ = \boxed{٨}$

٤) $|أ_ص| = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & -٦ \end{vmatrix} = (١ \times -٦) - (٢ \times ٥) = -٦ - ١٠ = \boxed{-١٦}$

٥) نحسب قيمة س من خلال : $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{٨}{-٨} = \boxed{-١}$

٦) نحسب قيمة ص من خلال : $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-١٦}{-٨} = \boxed{٢}$ ، الحل : $(س ، ص) = (-١ ، ٢)$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

مثال ٣

فلسطين : ٢٠١٩ إكمال ديسمبر

عند حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين وجد أن : $ص = ٣$ ، $|أ_س| = ٣$ ، $|أ_ص| = -٦$ ، جد قيمة س

الحـــل

$$ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|}$$

$$٣ = \frac{-٦}{|أ|} \leftarrow ٣|أ| = -٦ \leftarrow |أ| = \boxed{-٢}$$

$$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{٣}{-٢} = \boxed{-\frac{٣}{٢}}$$

مثال ٤

إذا ا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية ، وكان $|أ| = \begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix}$ ، $|أ_س| = \begin{vmatrix} ١٢ & ٢ \\ -٧ & -١ \end{vmatrix}$ ، $|أ_ص| = \begin{vmatrix} -٣ & ١٢ \\ ٢ & -٧ \end{vmatrix}$

ما قيمة كل من س،ص ؟

الحـــل

١) نجد : $|أ| = \begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = (-٣ \times -١) - (٢ \times ٢) = ٣ - ٤ = \boxed{-١}$

٢) نجد : $|أ_س| = \begin{vmatrix} ١٢ & ٢ \\ -٧ & -١ \end{vmatrix} = (١٢ \times -١) - (-٧ \times ٢) = -١٢ + ١٤ = \boxed{٢}$

٣) نجد : $|أ_ص| = \begin{vmatrix} -٣ & ١٢ \\ ٢ & -٧ \end{vmatrix} = (-٣ \times -٧) - (٢ \times ١٢) = ٢١ - ٢٤ = \boxed{-٣}$

٤) نحسب قيمة س من خلال : $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{٢}{-١} = \boxed{-٢}$

٥) نحسب قيمة ص من خلال : $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-٣}{-١} = \boxed{٣}$ الحل : $(س ، ص) = (-٢ ، ٣)$

مثال ٥

إذا كان: $أ_س = \begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٦ & -١ \end{bmatrix}$ ، $أ_ص = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$ ، في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ،

احسب قيمة كل من : $|أ|$ ، س ، ص . حيث أن : أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، $|أ| \neq ٠$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الحـــل

$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = (٣ \times -١) - (٢ \times ٤) = -٣ - ٨ = \boxed{-١١}$ (تم أخذ مدخلات المحدد من المعطيات)

$|أ_س| = \begin{vmatrix} -٢ & ٤ \\ ٦ & -١ \end{vmatrix} = (-٢ \times -١) - (٦ \times ٤) = ٢ - ٢٤ = \boxed{-٢٢}$

$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{-٢٢}{-١١} = \boxed{٢}$

$|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix} = (٣ \times ٦) - (٢ \times -٢) = ١٨ + ٤ = \boxed{٢٢}$

$ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{٢٢}{-١١} = \boxed{-٢}$

قاعدة كريمر

حلول تمارين ومسائل (٢-٥)

(١)

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = (٢ \times ٤) - (١ \times ١) = ٨ - ١ = \boxed{٧}$$

$$|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٩ & ٤ \end{vmatrix} = (٤ \times ٤) - (٩ \times ١) = ١٦ - ٩ = \boxed{٧}$$

$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٩ \end{vmatrix} = (٢ \times ٩) - (٤ \times ١) = ١٨ - ٤ = \boxed{١٤}$$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٧}{٧} = \boxed{١} \quad ، \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{١٤}{٧} = \boxed{٢}$$

(٢) أ) نرتب المعادلات إذا لزم ذلك :

$$٣س - ٤ص = ٨$$
$$س + ص = ١٢$$

١) نكتب المعادلات على الصورة (أ.ع = ج) : ←
$$\begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ \\ ١٢ \end{bmatrix}$$

٢) نفرض أ مصفوفة المعاملات أ = $\begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

٣) نجد : $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & -٤ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = (٣ \times ١) - (١ \times -٤) = ٣ + ٤ = \boxed{٧}$

إعداد المعلم سائد الحلاق

٤) نجد : $|أ_{س}|$ من خلال استبدال العمود الأول (الممثل لمعاملات س) بعمود مصفوفة الثوابت ، فينتج :

$$|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٨ & -٤ \\ ١٢ & ١ \end{vmatrix} = (٨ \times ١) - (١٢ \times -٤) = ٨ + ٤٨ = \boxed{٥٦}$$

٥) نجد : $|أ_{ص}|$ من خلال استبدال العمود الثاني (الممثل لمعاملات ص) بعمود مصفوفة الثوابت ، فينتج :

$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٨ \\ ١ & ١٢ \end{vmatrix} = (٣ \times ١٢) - (١ \times ٨) = ٣٦ - ٨ = \boxed{٢٨}$$

٦) نحسب قيمة س من خلال : $س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٥٦}{٧} = \boxed{٨}$

٧) نحسب قيمة ص من خلال : $ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{٢٨}{٧} = \boxed{٤}$ ← $(س ، ص) = (٨ ، ٤)$

ب

١) نرتب المعادلات إذا لزم ذلك : $٣س - ٢ص = ١٩$
$٣س + ص = ١٣$

٢) نكتب المعادلات على الصورة (أ.ع = ج) : $\leftarrow \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩ \\ ١٣ \end{bmatrix}$

٣) نفرض أ مصفوفة المعاملات أ $= \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

٤) نجد : $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = (٣ \times ١) - (-٢ \times ٣) = ٣ + ٦ = \boxed{٩}$

٥) نجد : $|أ_س|$ من خلال استبدال العمود الأول (الممثل لمعاملات س) بعمود مصفوفة الثوابت ، فينتج :

$|أ_س| = \begin{vmatrix} ١٩ & -٢ \\ ١٣ & ١ \end{vmatrix} = (١٩ \times ١) - (-٢ \times ١٣) = ١٩ + ٢٦ = \boxed{٤٥}$

٦) نجد : $|أ_ص|$ من خلال استبدال العمود الثاني (الممثل لمعاملات ص) بعمود مصفوفة الثوابت ، فينتج :

$|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٣ & ١٩ \\ ٣ & ١٣ \end{vmatrix} = (٣ \times ١٣) - (١٩ \times ٣) = ٣٩ - ٥٧ = \boxed{-١٨}$

٧) نحسب قيمة س من خلال : $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{٤٥}{٩} = \boxed{٥}$

٨) نحسب قيمة ص من خلال : $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-١٨}{٩} = \boxed{-٢} \leftarrow (س ، ص) = (٥ ، -٢)$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٣ عند استخدام قاعدة كريمر في حل نظام من المعادلات الخطية نتج أن : ص = ٤ ، $|أ_ص| = ٢٠$ ، $|أ_س| = -١٥$ ، جد قيمة س .

$ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|}$

$٤ = \frac{٢٠}{|أ|}$ (بالضرب التبادلي)

$\cancel{٤}\,|أ| = \frac{\cancel{٢٠}^{\,٥}}{\cancel{٤}_{\,١}} \leftarrow |أ| = \boxed{٥}$

$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} \leftarrow س = \frac{-١٥}{٥} = \boxed{-٣}$

ورقة عمل ٢ – ٥ قاعدة كريمر

أولاً إختر الإجابة الصحيحة

١ إذا كان: $|أ_س| = ٨$ ، $س = -٤$ في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، فما قيمة $|أ|$ ؟

أ −٠,٥   ب −٣٢   ج −٢   د ٢

٢ إذا كان: $|أ_ص| = -٩$ ، $ص = -٣$ في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، فما قيمة $|أ|$ ؟

أ ٣   ب −٣   ج $\frac{١}{٣}$ د ٢٧

٣ إذا كان: $|أ_س| = ٦$ ، $|أ| = ٣$ في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، فما قيمة س ؟

أ ١٨   ب ٢   ج $\frac{١}{٢}$ د −٢

٤ إذا كان: $|أ_ص| = -١٢$ ، $|أ| = ٢$ في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، فما قيمة ص ؟

أ ٦   ب −٦   ج $-\frac{١}{٦}$ د −٢٤

٥ إذا كان: $|أ| = -٣$ ، $س = ٦$ في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، فما قيمة $|أ_س|$ ؟

أ $-\frac{١}{٢}$ ب −٢   ج ١٨   د −١٨

إعداد المعلم: سائد الحلاق

٦ إذا كان: $|أ_س| = ٦$ ، $|أ_ص| = ١٦$ ، $س = -٣$ ، في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، فما قيمة ص ؟

أ −٢   ب ٨   ج −٨   د −٣٢

٧ عند استخدام قاعدة كريمر في حل نظام من المعادلات الخطية نتج أن $|أ| = ٧$ ، $|أ_س| = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ -١ & ١ \end{vmatrix}$ ، $|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$ ،

فما قيمتي س ، ص على الترتيب ؟

أ (٢، ١)   ب (١، ٢)   ج (−١، −٢)   د (−٢، −١)

٨ فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كانت: $|أ_س| = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix}$ ، $|أ_ص| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ ، فما قيمة $|أ|$؟

أ −٣   ب −٥   ج −١٢   د −١

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال	الجواب النهائي
١	في نظام كريمر ، إذا كان: $\lvert أ \rvert = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ ، $أ_س = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}$ ، $أ_ص = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}$ ، فما قيمتي س ، ص على الترتيب ، حيث أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ؟	س = ٣ ص = ١
٢	في نظام كريمر ، إذا كان: $\lvert -2أ \rvert = 8$ ، $\lvert أ_س \rvert = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ ، $\lvert أ_ص \rvert = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ ، فما قيمتي س ، ص على الترتيب ،حيث أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ؟	س = ٦,٥ ص = −٨
٣	في نظام كريمر ، إذا كان: $\lvert أ_س \rvert = -12$ ، $\lvert أ_ص \rvert = 15$ ، ص = ٥ ، في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، حيث أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، فما قيمة س ؟	س = −٤
٤	في نظام كريمر ، إذا كان: $أ_س = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ ، $أ_ص = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ ، في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، احسب قيمة كل من : س ،ص حيث أن : أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، $\lvert أ \rvert \neq$ صفر.	س = ٤ ص = ٢
٥	في نظام كريمر ، إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكان $\lvert أ \rvert = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ ، $\lvert أ_س \rvert = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$ ، $\lvert أ_ص \rvert = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ ما قيمة كل من س ، ص ؟	س = ١ ص = ٥
٦	جد حل المعادلة المصفوفية التالية بطريقة كريمر: $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -4 \end{bmatrix}$	س = ٢ ص = −٢
٧	استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي: ص = ٤ − ٢س ، س = ص + ٥	س = ٣ ص = −٢

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٨	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال أغسطس استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي: ٣س + ص = −٣ ٢ص = ٤ − س	س = −٢ ، ص = ٣
٩	فلسطين : ٢٠١٩إكمال استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي: ٥س + ص − ٨ = ٠ ص = ٢س + ١	س = ١ ، ص = ٣
١٠	فلسطين : ٢٠١٩ استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي: ٢س − ١ − ص = ٠ س − ٢ص = −٤	س = ٢ ، ص = ٣
١١	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال ديسمبر في نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين باستخدام قاعدة كريمر وجد أن : ، $\lvert أ_س \rvert = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix}$ ، $\lvert أ_ص \rvert = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ ، أوجد : ١) المصفوفة ٢) مجموعة حل النظام	$أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$ س = ٣ ص = −١
١٢	نابلس : ٢٠٢٠ تجريبي استخدم قاعدة كريمر لحل النظام التالي: ٤ س − ٣ = ص ، س + ٢ ص = ١٢	س = ٢ ، ص = ٥
١٣	قباطية : ٢٠٢٠ تجريبي إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكان $\lvert أ \rvert = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ −١ & ٢ \end{vmatrix}$ ، $\lvert أ_س \rvert = \begin{vmatrix} ١ & ٨ \\ −١ & −٣ \end{vmatrix}$ ، $\lvert أ_ص \rvert = \begin{vmatrix} ٨ & ٣ \\ −٣ & ٢ \end{vmatrix}$ ، ما قيمة كل من س ، ص ؟	س = ١ ، ص = ٥
١٤	قباطية : ٢٠١٩ تجريبي استخدم قاعدة كريمر لحل النظام التالي: ٥ س − ٢ ص = ٥ ، ٩ = ص − ٢ س	س = ٢٣ ، ص = ٥٥
١٥	شرق غزة : ٢٠١٩ تجريبي باستخدم قاعدة كريمر حل النظام التالي: س + ٢ ص = ٥ ، ٣س − ص = ١	س = ١ ، ص = ٢
١٦	فلسطين : ٢٠١٣ إكمال عند حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين بطريقة كريمر ، وجد أن : س = −٢، $\lvert أ_س \rvert$ = ٤ ، $\lvert أ_ص \rvert$ = ٦ ، فما قيمة ص؟	ص = −٣

إعداد المعلم : سائد الحلاق

تمارين عامة

تمارين ومسائل (٢-٦)

١

الرقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الحل	د	ب	ب	أ	د	ب	ب	جـ	أ	ب

٢

$\text{أ}\times(\text{ب}+\text{جـ}) = \text{أ}\times\text{ب} + \text{أ}\times\text{جـ}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

٣

نرتب المعادلات: $2\text{س} - \text{ص} = -1$

$\text{س} - 2\text{ص} = 4$

نكتب المعادلات على الصورة (أ.ع = جـ) : $\leftarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

نفرض أ مصفوفة المعاملات أ $= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (2\times -2) - (-1\times 1) = -4 + 1 = \boxed{-3}$$

$$|\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-1\times -2) - (-1\times 4) = 2 - (-4) = \boxed{6}$$

$$|\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (2\times 4) - (-1\times 1) = 8 + 1 = \boxed{9}$$

نحسب قيمة س من خلال : $\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{6}{-3} = \boxed{-2}$

نحسب قيمة ص من خلال : $\text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{9}{-3} = \boxed{-3}$

$\leftarrow (\text{س} ، \text{ص}) = (-2 ، -3)$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٤) نرتب المعادلات:

$$س - ص = -١$$
$$٣س + ٣ص = ٦$$

نكتب المعادلات على الصورة (أ.ع = ج) :

$$\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

نفرض أ مصفوفة المعاملات أ $= \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$

نجد: $|أ| = (١ \times ٣) - (-١ \times ٣) = ٣ + ٣ = ٦$

نجد : $أ^{-١} = \frac{١}{٦} \times \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٦} \times \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٦} \begin{bmatrix} ٣ \\ ٩ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٦} \\ \frac{٩}{٦} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} \\ \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$$

$س = \boxed{\frac{١}{٢}}$ ، $ص = \boxed{\frac{٣}{٢}}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٥) أجد قيمة / قيم س التي تحقق المعادلة : $٣\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + س^٢ = \begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٦ & س \end{vmatrix}$

$$٣((٣ \times ١) - (١ \times ٢)) + س^٢ = (٤ \times س) - (٠ \times ٦)$$

$$٣(٣ - ٢) + س^٢ = ٤س$$

$$٣ \times ١ + س^٢ = ٤س$$

$$٣ + س^٢ = ٤س$$

$$س^٢ - ٤س + ٣ = ٠$$

$$(س - ١)(س - ٣) = ٠$$

$س = \boxed{١}$ ، $س = \boxed{٣}$

٦ أجد المصفوفة س التي تحقق المعادلة الآتية :

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix} -١٤ & ٨ \\ -٨ & ٢ \end{bmatrix}$$

نفرض أن $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

نحسب النظير الضربي للمصفوفة أ أي نحسب $أ^{-١}$

$$|أ| = (٤ \times ١) - (٣ \times ٢) = \boxed{-٢}$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

نضرب $أ^{-١}$ من جهة اليمين

$$س = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١٤ & ٨ \\ -٨ & ٢ \end{bmatrix}$$ نجري عملية ضرب مصفوفتين

إعداد المعلم سائد الحلاق

$$= \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ١٠ & ٢ \\ -٤ & -٨ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{١٠}{-٢} & \frac{٢}{-٢} \\ \frac{-٤}{-٢} & \frac{-٨}{-٢} \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} -٥ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

كتاب الفترة الثانية

حلول الاختبار الذاتي

١

الرقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الحل	أ	جـ	أ	د	أ	−٢٨	ب	أ	أ	د

٢ استخدم قاعدة كريمر لحل النظام التالي : ٣س + ٢ص − ٧ = ٤
٢ص + ٤س = ٦١

١) نرتب المعادلات : ٣س + ٢ص = ١١
٤س + ٢ص = ٦١

٢) نكتب المعادلات على الصورة (أ.ع = جـ) : ←
$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ \\ ٦١ \end{bmatrix}$$

٣) نفرض أ مصفوفة المعاملات أ =
$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

٤) نجد : $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = (٣ \times ٢) - (٤ \times ٢) = ٦ - ٨ = \boxed{-٢}$

٥) نجد : $|أ_س|$ من خلال استبدال العمود الأول (الممثل لمعاملات س) بعمود مصفوفة الثوابت ، فينتج :

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$$|أ_س| = \begin{vmatrix} ١١ & ٢ \\ ٦١ & ٢ \end{vmatrix} = (١١ \times ٢) - (٦١ \times ٢) = ٢٢ - ١٢٢ = \boxed{-١٠٠}$$

٦) نجد : $|أ_ص|$ من خلال استبدال العمود الثاني (الممثل لمعاملات ص) بعمود مصفوفة الثوابت ، فينتج :

$$|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٣ & ١١ \\ ٤ & ٦١ \end{vmatrix} = (٣ \times ٦١) - (٤ \times ١١) = ١٨٣ - ٤٤ = \boxed{١٣٩}$$

٧) نحسب قيمة س من خلال : $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{-١٠٠}{-٢} = \boxed{٥٠}$

٨) نحسب قيمة ص من خلال : $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{١٣٩}{-٢} = \boxed{-٦٩,٥}$

← (س ، ص) = (٥٠ ، −٦٩,٥)

٣) حل المعادلة المصفوفية التالية :

$$٣\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٩ & -٦ \end{bmatrix} - ٢\text{س} = \begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ ٢ & -٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ -٥ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١٥ & ١٢ \\ ٢٧ & -١٨ \end{bmatrix} - ٢\text{س} = \begin{bmatrix} ٨ & -٤ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$-٢\text{س} = \begin{bmatrix} ٨ & -٤ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٥ & ١٢ \\ ٢٧ & -١٨ \end{bmatrix}$$

$$-٢\text{س} = \begin{bmatrix} -٧ & -١٦ \\ -٣٠ & ١٦ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} \frac{-٧}{-٢} & \frac{-١٦}{-٢} \\ \frac{-٣٠}{-٢} & \frac{١٦}{-٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣٫٥ & ٨ \\ ١٥ & -٨ \end{bmatrix}$$

٤) إذا كانت $\text{ص} = \begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & -١ \end{bmatrix}$ جد $\text{ص}^{-١}$

$$\text{ص} = \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix} \leftarrow |\text{ص}| = (-٢ \times -٣) - (٠ \times ٠) = ٦ - ٠ = \boxed{٦}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$$\text{ص}^{-١} = \frac{١}{٦}\begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-٣}{٦} & \frac{٠}{٦} \\ \frac{٠}{٦} & \frac{-٢}{٦} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{١}{٢} & ٠ \\ ٠ & -\frac{١}{٣} \end{bmatrix}$$

٥) ما قيم س التي تحقق المعادلة : $\begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ ٤ & ٣-\text{س} \end{vmatrix} = ٨$ ؟

$$٥(٣-\text{س}) - (٤ \times -٢) = \boxed{٨}$$

$$١٥ - ٥\text{س} + ٨ = ٨$$

$$\frac{-٥}{-٥}\text{س} = \frac{-١٥}{-٥}$$

$$\text{س} = \boxed{٣}$$

مدرسة شهداء التقوى الثانوية للبنين – أ. سائد الحلاق – مديرية غرب غزة

٢ – ٧ أسئلة اثراء الوحدة الثانية (المصفوفات)

القسم الأول: أسئلة اختيار من المتعدد :

السؤال الأول / ضع دائرة رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

١) إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 0{,}5 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $-3(\text{أ}_{32} + 2\text{ب}_{13})$ ؟

أ) ٢٧ ب) −٢٧ جـ) ٩ د) −٢١

٢) إذا كانت: $\text{أ} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & -2 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $4\text{أ}_{21} - \text{ب}_{12}$ ؟

أ) −٧ ب) ٨ جـ) ٤ د) −٤

٣) إذا كانت: $\text{أ} = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 3 \\ 12 & -5 & -2 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $\text{أ}_{23} \times -3\text{ب}_{21}$ ؟

أ) ٦ ب) −٦ جـ) ٣ د) −٣

٤) إذا كانت: $2\text{س} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ، $\frac{1}{2}\text{ص} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة : $2\text{س}_{22} + 3\text{ص}_{31}$ ؟

أ) −١٤ ب) −١٠ جـ) ٢٠ د) ١٤

٥) إذا كانت: $\begin{bmatrix} 2\text{س}+\text{ص} & \text{ص} \\ \text{س} & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة س + ٢ص ؟

أ) ١٣ ب) ٢٠ جـ) ١٩ د) −١٩

٦) إذا كان : $\begin{bmatrix} 4 & \text{ص}^2 \\ 10 & \text{ص}+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ \text{س}-\text{ص} & 1 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة س ؟

أ) −١٤ ب) ١٤ ج) −٦ د) ٦

٧) إذا كانت $\begin{bmatrix} 2\text{س} & 3 \\ \text{س}+\text{ص} & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$ ، فما قيمتي س ، ص على الترتيب ؟

أ) ٦ ، ٠ ب) ٦ ، −١٢ ج) ٦ ، ١٢ د) −٦ ، ١٢

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٨) إذا كانت: أ $= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، ، فما قيمة ١٥(أ−ب)+١٤(ب−أ) ؟

أ) $\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

٩) إذا كان ٤أ $= \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ فما المصفوفة −أ − م$_2$ ؟

أ) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

١٠) إذا كانت: $\frac{1}{3}$س $= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ ، فإن $-\frac{2}{3}$س تساوي:

أ) $\begin{bmatrix} 6 & 2 & -12 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 9 & 3 & -18 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -6 & -2 & 12 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

١١) إذا كانت س $= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ، ص $= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، فإن (س − و$_2$) − (ص + م$_2$) تساوي :

أ) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

١٢) إذا علمت أن: أ $= \begin{bmatrix} 5 & -4 \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، وكانت المصفوفة س = أ − ب ، فما قيمة ٢(س$_{21}$ + س$_{11}$)؟

أ) ١٨ ب) −٣٦ ج) صفر د) −١٨

١٣) ما حل المعادلة المصفوفة: ٢س + $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ = س + $\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ ؟

إعداد المعلم: سائد الحلاق

أ) $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -3 & -9 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$

١٤) إذا كانت المصفوفة ص من الرتبة ٣×٢ ، فإن رتبة المصفوفة س بحيث ص$_{3\times2}$ − س = ل$_{3\times2}$

أ) ٢×٢ ب) ٢×٣ ج) ٣×٣ د) ٣×٢

١٥) إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة ٢×٢ بحيث : ٣س − ٦م$_2$ = ٢و$_2$ ، فما هي المصفوفة س ؟

أ) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

١٦) ما حل المعادلة المصفوفية: ٢(س + $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$) = $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ ؟

أ) $\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 12 \\ 10 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

١٧) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٧ & ١ \\ -١ & -٥ \end{bmatrix}$ ، وكانت ٢أ − س = −٣م$_٢$ ، فإن المصفوفة س تساوي :

أ) $\begin{bmatrix} -١٧ & -١ \\ -٢ & -١٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -١١ & ٢ \\ ٢ & -٧ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -١١ & -٢ \\ ٢ & -٧ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -١١ & ٢ \\ -٢ & -٧ \end{bmatrix}$

١٨) ما المصفوفة س بحيث: ٣(س + [−١ ١]) = ٢س + [٠ −١]؟

أ) [−٣ −٤] ب) [٣ ٤] ج) [−٣ ٤] د) [٣ −٤]

١٩) إذا كانت: $\frac{١}{٣}$س = $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٣ & -٩ \end{bmatrix}$ ، فإن −$\frac{١}{٩}$س =

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٩ & ١٨ \\ ٩ & -٢٧ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

٢٠) إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢س & ٤ \\ س & -٥ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ع & -١ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ص & ٣ \\ -٧ & ص \end{bmatrix}$ ، فما قيمة ع ؟

أ) −١٤ ب) −١ ج) −٦ د) ٦

٢١) إذا كان : أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية ، وكان أ + ب = ب ، فإن أ =

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ د) و$_٢$

٢٢) إذا كان : أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية ، وكان ب × أ = أ ، فإن ب =

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ د) م$_٣$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

٢٣) إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات: بحيث : أ$_{٣×ي}$ × ب$_{٤×ن}$ = جـ$_{٣×٥}$ ، فإن ي × ن = ...

أ) ١٥ ب) ٢٠ ج) ٩ د) ١

٢٤) إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات:بحيث جـ × ب = أ، وكانت رتبة أ = ٣×٤ ، جـ = ٣×٣ ، فما رتبة المصفوفة ب ؟

أ) ٣×٣ ب) ٤×٣ ج) ٤×٤ د) ٣×٤

٢٥) إذا كانت: أ مصفوفة ، فإن أ + (−أ) = ...

أ) ٢أ ب) و ج) م د) أ^٢

٢٦) إذا كانت: أ × $\begin{bmatrix} ١ \\ -١ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١ \\ -١ \end{bmatrix}$ ، فما المصفوفة أ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ \\ -١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١ \\ ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

٢٧) إذا كانت رتبة المصفوفة س هي ٥×٢ ، ورتبة المصفوفة ص هي ٥×٥ ، وكان أ = ص×س . ما رتبة المصفوفة أ ؟

أ) ٥×٢ ب) ٢×٥ ج) ٥×٥ د) لا يمكن إجراء العملية

٢٨) إذا كان س = $\begin{bmatrix} \text{أ} & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\text{س}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ \text{ب} & -3 \end{bmatrix}$ ، فما قيمتي أ ، ب على الترتيب ؟

أ) ٣ ، −٢ ب) −٣ ، −٢ ج) −٣ ، ٢ د) −٢ ، ٣

٢٩) إذا كان س = $\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، وكانت المصفوفة ع = ص × س ، فما قيمة $\frac{1}{2}\text{ع}_{21}$ ؟

أ) ٣ ب) −٣ ج) −١ د) −٦

٣٠) إذا كان : أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية ، وكان |أ| = |−٢ب| ، |ب| = ٥ ، فإن |٢أ| = ...

أ) ٤٠ ب) ٨٠ ج) ٢٠ د) −٢٠

٣١) إذا كان : أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية ، وكان |٤أ| = |−٢ب| ، |ب| = ٤ ، فإن |٥أ| = ...

أ) ٢٥ ب) ٥٠ ج) −٢٥ د) −٥

٣٢) إذا كانت : س = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ \text{جـ} & 2 \end{bmatrix}$ ، $\text{س}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة جـ ؟

أ) ٦ ب) ١٢ ج) −٦ د) ٣

٣٣) ما مجموعة جميع قيم س التي تجعل: $\begin{bmatrix} 1 & \text{س}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix}$ ؟

إعداد المعلم : سائد الحلاق

أ) {−٤ ، ٣} ب) {٤ ، −٣} ج) {−٤ ، −٣} د) {٣ ، ٤}

٣٤) ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} 5 & -\text{س} \\ \text{س} & -20 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي؟

أ) ١٠ ب) −١٠ ج) ±١٠ د) ١٠٠

٣٥) ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & \text{س} \end{bmatrix}$ منفردة ؟

أ) ٣ ب) −٣ ج) −٦ د) ٦

٣٦) إذا كان $\begin{vmatrix} 3 & \text{س}^2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -11$ ، فما قيمة/قيم س؟

أ) ٢ ، −٢ ب) −٣ ، ٣ ج) ٤ د) −٣

٣٧) إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ × ٢ ، وكان $|\sqrt{٦}\ س| = -١٢$ فما قيمة $|-٢س| + ٢|س| - |-\frac{١}{٢}س| + \frac{١}{٢}$ ؟

أ) ١١ ب) −١١ ج) −١٣ د) ١٣

٣٨) إذا كانت ٤س = $\begin{bmatrix} ٠ & -٤ \\ ٤ & -١٢ \end{bmatrix}$ ، وكان $|٢ص| = -١٢$ ، حيث ص مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، فما قيمة $|س ص|$ ؟

أ) ٣ ب) −٦ ج) −٣ د) ٦

٣٩) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ س & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكان $|\frac{١}{٢}أ| = -\frac{١}{٢}$ ، فما قيمة س ؟

أ) ٤ ب) ١٢ ج) −٤ د) $-\frac{١٦}{٣}$

٤٠) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١ & س \end{bmatrix}$ ، وكان $|-٢أ| = ١٢$ ، فما قيمة/قيم س ؟

أ) ١ ب) ١ ، −١ ج) −١ د) ٠

٤١) إذا كانت $|٣أ| = ١٨$ ، وفما قيمة $١٠|-أ| - ٢|-٣أ|$ ؟

أ) ٣٦ ب) −٥٦ ج) ١٦ د) −١٦

٤٢) إذا كان : أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية ، وكان $|أ| = ٢|ب|$ ، فإن $|أ × ب| =$ ....

أ) $٤|أ|^٢$ ب) $٢|أ|^٢$ ج) $\frac{١}{٢}|أ|^٢$ د) $\frac{١}{٤}|أ|^٢$

إعداد المعلم : سائد ا لحلاق

٤٣) إذا كان : $|أ_س| = -٥$ ، $|أ_ص| = ١٠$ ، ص = ٢ ، فما قيمة س؟

أ) −٥ ب) ج) −١ د) ٢٥

٤٤) إذا علمت أن : ب مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكان $|-٣ب| = ٩$ ، فما قيمة $\frac{١}{٢}|٢ب|$ ؟:

أ) ٢ ب) ٤ جـ) ٨ د) ١

٤٥) إذا كانت المصفوفة س = $\begin{bmatrix} -ب & ب \\ ب & ٢ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة/قيم ب التي تجعل المصفوفة س ليس لها نظير ضربي؟

أ) ٠،٢ ب) ٠ ، −٢ ج) −٢ د) ٠

٤٦) إذا كانت : $ب^{-١} = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فما المصفوفة ب؟

أ) $\begin{bmatrix} ٥ & -٤ \\ -٦ & ٥ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٦ & ٥ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -٥ & ٤ \\ ٦ & -٥ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٥ & -٦ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$

٤٧) إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة ٢×٢ ،و كان $|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٨ \end{vmatrix}$ ، $|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٧ & ٢ \\ ٨ & ١ \end{vmatrix}$ فما قيمة س ؟

أ) ٤,٥ ب) ٠,٥ ج) −٢ د) ٢

٤٨) إذا كانت $\frac{١}{٢}$ س × $\begin{bmatrix} ٠ & −٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & −٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، فإن ٣س =

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٦ \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$

٤٩) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} −١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، تمثل مصفوفة المعاملات في نظام خطي مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين س ، ص ،

وكانت $أ_{س} = \begin{bmatrix} −١ & ٧ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة المتغير ص ؟

أ) ٤ ب) ١ ج) −٤ د) −١

٥٠) إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية بحيث : ٢س − ٤$م_{٢}$ = ٣$و_{٢}$ ، فإن |س| يساوي:

أ) ٢ ب) ٤ ج) ١ د) −٤

٥١) ما قيمة : $\begin{vmatrix} ٠ & −١ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} −٢ & ٢ \\ ٣ & −٤ \end{vmatrix}$ ؟

إعداد المعلم : سائد الحلاق

أ) −٩ ب) ٢١ ج) −٥ د) ٥

٥٢) إذا كانت: $\left(س^{−١}\right)^{−١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فإن س تساوي :

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} −٢ & ٦ \\ ١ & −٣ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} −٢ & ١ \\ ٦ & −٣ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix}$

٥٣) ما قيمة / قيم س التي تجعل: $\begin{vmatrix} ٢ & −١ \\ س^{٢} & ٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ س & ٢ \end{vmatrix}$ ؟

أ) ٢ ، −١ ب) ٢ ، ١ ج) −١ ، −٢ د) ١ ، −٢

٥٤) إذا كانت : ب = $\begin{bmatrix} ٣ & س \\ س & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكان |−٣ب| = ٢٧ ، ما قيمة / قيم س ؟

أ) ٣ ب) −٣ ج) −٣ ، +٣ د) −٩ ، ٩

القسم الثاني: الأسئلة المقالية :

أجب عن الأسئلة التالية:

١) إذا كان $\begin{bmatrix} ص & ٢ \\ ٤ & س \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ٦ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ١٨ \\ ٦ & ٢ع \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل من الثوابت س ، ص ، ع ؟

٢) إذا كان $س = \begin{bmatrix} ٢ل & ٦ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} -٣ & \frac{١}{٢}ب \end{bmatrix}$ وكان $-٣س = ٤ص$ ، جد قيمة كل من الثابتين ل ، ب

٣) إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد:

أ) $|٢أ - ٣ب|$ $(٢ب\,أ)$ $(أب)^{-١}$ قيمة س التي تجعل : $أ_{٢١} + ب_{١٢} = ب_{١١} - ٢س$

٤) إذا كان $س = \begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ -٤ & -٦ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} -٤ & ٥ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix}$ ، جد:

أ) $\frac{١}{٢}(س + ص)$ ب) $ص \times ٢س$

ج) $|س - ص|$ د) $٢س\,ص^{-١}$

٥) إذا كان : $س \times ص = ع$ ، وكان $س = \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ع = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، أوجد $٢\,ص^{-١}$

٦) أجد قيمة / قيم س التي تحقق المعادلة الآتية: $٣\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + س^{٢} = \begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٦ & س \end{vmatrix}$

٧) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ، وكانت $ع\,أ = ب$ ، جد المصفوفة ع

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٨) حل المعادلة المصفوفية التالية: $٢\left(س + \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -٥ & ٤ \end{bmatrix}\right) = -٣\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & -٦ \end{bmatrix}$

٩) أجد المصفوفة س التي تحقق المعادلة المصفوفية التالية: $٣\left(س + ٢\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} + م_{٢}\right) = س - ٢\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$

١٠) حل المعادلة المصفوفية التالية: $س \times \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix}$

١١) حل المعادلة المصفوفية التالية: $\begin{bmatrix} -٤ & ٣ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} \times ٣س = \begin{bmatrix} -٢ & ٦ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix} + ٢م^{٢}$

١٢) أجد المصفوفة س التي تحقق المعادلة المصفوفية التالية: $\begin{bmatrix} -٤ & -٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} - ٣م_{٢} = س \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

١٣) حل النظام التالي باستخدام النظير الضربي : $-٣ص + ٥س = ٧$ ، $٣س - ٨ = ٢ص$

١٤) استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات: $٩ - ص = -٣س$ ، $٤ص - ٨ = ٢س$

٢ – ٨ أسئلة تفوق الوحدة الثانية (المصفوفات)

حاول أن تحل الأسئلة التالية :

(١) إذا كانت $٢أ = [-٣ \quad س]$ ، $\frac{ب}{٣} = [ص \quad ٣]$ ، فما قيمة كل من الثابتين س ، ص إذا كان $-٢أ - ٣ب = و_{٢١}$

(٢) إذا كان س ، ص مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية ، وكان $|٤س| = |-٢ص|$ ، $٢|-ص| = ٨$ ، فما قيمة $|\sqrt{٣}\,س|$ ؟

(٣) إذا كان $س \times ص = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٧ \end{bmatrix}$ ، $س \times ع = \begin{bmatrix} ٨ \\ -٢ \end{bmatrix}$ ، أجد $س(ص - ع)$

(٤) إذا كان $|أب| = ٢٥$ ، $|-٣ب| = ٤٥$ ، احسب: $|٢أ| \times \left|\frac{ب}{٢}\right|$

(٥) إذا كانت $جـ = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، أثبت أن $|جـ| = |٢جـ^{-١}|$.

(٦) إذا كان $\frac{أ}{٢} = \begin{bmatrix} س & ٢ \\ ١ & س \end{bmatrix}$ ، $\sqrt{٤}\,ب = \begin{bmatrix} ٢س & ٤ \\ ٦ & ٨ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة / قيم الثابت س إذا علمت أن $|أ| - |-ب| = -٢$

(٧) إذا كانت $م = \begin{bmatrix} -٢ & س \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ن = \begin{bmatrix} ٣س & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، وكانت $ل = م + ن$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

أوجد قيمة الثابت س التي تجعل المصفوفة ل مصفوفة منفردة .

(٨) إذا كان $س = [٢أ \quad ٦]$ ، $ص = [-٣ \quad \frac{١}{٢}ب]$ ، وكان $-٣س = ٤ص$ ،

فما قيمة كل من الثابتين أ ، ب ؟

(٩) إذا كان $(س \times ص)^{-١} = \begin{bmatrix} -٤ & ٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $س \times ع = \begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، بين أن : $س(ص + ع) = ٢م_٢$

(١٠) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ب - ١ & ٣ \\ ٢ & ب + ١ \end{bmatrix}$ ، وكان $|أ| = ٥$ فما قيمة / قيم **ب** ؟

(١١) إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكانت $٣س - ٦م_٢ = ٦٣و_٢$ ، فما قيمة $|س| \times س^{-١}$ ؟

(١٢) إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٥ & -٤ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix}$ ، أثبت أن $|س^{-١}| = \frac{١}{|س|}$

(١٣) إذا كان $أ = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، $(أب)^{-١} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، أجد $ب^{-١}$

(١٤) حل المعادلة المصفوفية التالية : $٢(س - و_٢) = ٤س - ٢\left(\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} + \frac{١}{٢}س\right) - ٣م_٢$

(١٥) إذا كان : $\begin{bmatrix} ٠ & ب \\ أ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ \\ ٨ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل من أ، ب ؟

(١٦) إذا كان $\begin{bmatrix} -١ & س & ٣ \\ ١ & ٠ & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٧ & ٣ \\ ص & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل من س، ص ؟

(١٧) إذا كان $س = \begin{bmatrix} -٤ & -٦ \\ ٤ & ٩ \end{bmatrix}$ وكان $٣|ك س| = ٣٦$ ، فما قيمة الثابت ك ؟

(١٨) إذا كان $س^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $س ص = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ، جد المصفوفة ص

إعداد المعلم: سائد الحلاق

(١٩) إذا كان $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ وكان $٢أ \times ب - \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = م_٢$ ، أجد المصفوفة ب

(٢٠) إذا كان $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٢ & ٧ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

فحل المعادلة: $أ^{-١} \times (م_٢ + أ س) = ب$

(٢١) عند حل المعادلتين الآتيتين بنظام كريمر : $ب ص - س = ٤$ ، $ص = -أ س + ٥$ وجد أن :

$|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٤ & -١ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix}$ ، $|أ_س| = -٦$ ، فما قيمة كل من الثابتين أ، ب ؟

(٢٢) حل النظام التالي باستخدام قاعدة كريمر $|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$ ، $|أ_س| = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix}$

دولة فلسطين وزارة التربية والتعليم العالي مديرية التربية والتعليم ـــ غرب غزة	اختبار نهاية الوحدة الثانية		الاسم:		
	مادة الاختبار	الرياضيات			
	عدد الصفحات	٢	المدرسة:		العلامة
	التاريخ:	٢٠٢٠م	الصف:	الثاني عشر أدبي وشرعي ( )	
	إعداد المعلم	سائد زياد الحلاق	الزمن:	تسعون دقيقة	٥٠

ملاحظة: عدد أسئلة الاختبار " ستة " أسئلة أجب عنها جميعا

السؤال الأول: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة: (٢٠) علامة

١) إذا كان : ب = $\begin{bmatrix} ٥ & -٧ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ & ٠ \\ ٦ & ٦ & ٨ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $٣\left(ب_{٢١} + \frac{جـ_{٣٢}}{٢}\right)$ ؟

أ) ٣ ب) −٩ جـ) ٩ د) −٣

٢) إذا كان : $\begin{bmatrix} ص^٢ - ١ & ٤ \\ ٧ & ١ + ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ ٢س + ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمتي س ، ص على الترتيب؟

أ) ٢ ، ٣ ب) −٢ ، −٣ ج) −٢ ، ٣ د) ٢ ، −٣

٣) إذا كانت: أ مصفوفة ، فإن $|أ \times أ^{-١}| = ...$

أ) ٠ ب) ١ ج) −١ د) م

٤) ما مجموعة جميع قيم س التي تجعل : $\begin{bmatrix} ٢ & -س \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣س \\ س \end{bmatrix} = [٨]$ ؟

إعداد المعلم : سائد ا لحلاق

أ) {−٢ ، ٤} ب) {−٢ ، ٤} ج) {٢ ، ٤} د) {−٢ ، −٤}

٥) إذا كانت: ٢أ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ٠ & ٨ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٢ & -٥ \end{bmatrix}$ ، ، فما قيمة ٢٠أ + ١٩ب − ١٨(أ + ب) ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٧ & -٢ \\ -٢ & ١١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -١ & -١٠ \\ ٢ & ١٣ \end{bmatrix}$

٦) ما حل المعادلة المصفوفية: $٣\left(س - \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} - ٢س$ ؟

أ) $\begin{bmatrix} -١ \\ ٥ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٤ \\ ٥ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$

٧) إذا كان : $أ_{٢×٢}$ ، $ب_{٢×٣}$ ، $جـ_{٣×٢}$ ، فأي من العمليات التالية يمكن إجراؤها؟

أ) أ × ب + جـ ب) جـ × أ + ب ج) جـ × ب + أ د) ب × جـ + أ

٨) إذا كان : أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية ، وكان $|أ| = ٢|ب|$ ، فإن $|أ \times ب| =$ ....

أ) $\frac{١}{٢}|ب|^{٢}$ ب) $٢|ب|^{٢}$ ج) $\frac{١}{٤}|ب|^{٢}$ د) $٤|ب|^{٢}$

٩) ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} -٦ & ٢س \\ س & -٣ \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي؟

أ) ± ٣ ب) -٣ ج) ± ١٨ د) ± ٣٦

١٠) إذا كان: $|أ_{س}| = ١٢$ ، $|أ_{ص}| = -٦$ ، س $= -٢$ ، فما قيمة ص؟

أ) -٦ ب) -١ ج) ٣٦ د) ١

السؤال الثاني : (٩) علامات

إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٢ & -٦ \end{bmatrix}$ ، جد:

١) $\left|أ - \frac{١}{٢}ب\right|$ ٢) $(ب أ)^{-١}$ ٣) $(٢أ \times ب)$

السؤال الثالث: (٦) علامات

حل المعادلة المصفوفية التالية:

$$٢س \times \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -٦ & ٦ \end{bmatrix}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

السؤال الرابع : (٥) علامات

إذا كانت المصفوفة $ص = \begin{vmatrix} ٣ & س \\ س & ٢ \end{vmatrix}$ وكان $|-٣ص| = ٢٧$، فما قيمة / قيم الثابت س ؟

السؤال الخامس : (١٠) علامات

استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات التالي:

$٣ص = -٥س + ٧$ ، $٢ص - س + ٤ = ٠$

إنتهى

دولة فلســـــــــــطين وزارة التربية والتعليم العالي مديرية التربية والتعليم ـــ غرب غزة	اختبار تجريبي لنهاية الفصل الدراسي الأول		الاسم:		
	مادة الاختبار	الرياضيات			
	عدد الصفـــحات	٤	المدرسة:		العلامة
	إعداد المعلم	سائد زياد الحلاق	الصف:	الثاني عشر أدبي وشرعي ( )	
	العام الدراسي	٢٠٢٠/٢٠٢١م	الزمن:	ساعتان	١٠٠

ملاحظة : عدد أسئلة الاختبار " ستة " أسئلة أجب عن خمسة منها فقط

القسم الأول : يتكون هذا القسم من (٤) أسئلة وعلى المشترك أن يجيب عنها جميعاً.

السؤال الأول: (٣٠) علامة

يتكون هذا السؤال من (٢٠) فقرة من نوع اختيار من متعدد ، من أربعة بدائل ، اختر رمز الإجابة الصحيحة :

١) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق (س) = س ^{٢} + ١ للفترة [أ، ٤] هو ١ ، فما قيمة / قيم الثابت أ ؟

أ) ٤ ب) − ٣ ج) ٤، − ٣ د) − ٤، ٣

٢) إذا كان : ٢ق (س) = ٦س − ٣هـ (س) ، وكان ق′ (١) = − ٦ ، ما قيمة هـ′ (س) ؟

أ) − ١٨ ب) − ٣ ج) − ٦ د) ٦

٣) إذا كان الاقتران ق (س) = − س $^{-١}$ − ١ ، فإن ق′(س) يساوي

أ) $\frac{١}{س^{٢}}$ − ١ ب) س ج) $\frac{١}{س^{٢}}$ د) س ^{٢}

٤) إذا كان الاقتران ق(س) = ب س ^{٢} + ٢س ، وكان ق′(٢) = ١٠ ، فما قيمة الثابت ب ؟

إعداد المعلم: سائد الحلاق

أ) ٨ ب) ١٢ ج) − ٢ د) ٢

٥) إذا كان (ق × هـ)′(٢) = ٢٠ ، ق(٢) = − ٥ ، ق′(٢) = ٣ ، هـ′(٢) = − ٢ ، فما قيمة هـ(٢)؟

أ) ٢ ب) − ٢ ج) ١٠ د) − ٦

٦) إذا كان الاقتران هـ(س) = $\frac{٢ - س}{س + ١}$ ، فما قيمة هـ′(− ٢)؟

أ) − ٣ ب) ٣ ج) ٥ د) $\frac{١}{٣}$

٧) الاقتران ق(س) = س ^{٢} − ٢س لهُ قيمة صغرى محلية تساوي :

أ) ٣ ب) ٤ ج) ١ د) − ١

٨) إذا كان الاقتران ق(س) = س ^{٣} + $\int_{ب}^{ب}$ [(٢س ^{٢}) − ($\sqrt{س}$)] دس ، فما قيمة ق′(− ٢)؟

أ) − ١٠ ب) ١٠ ج) ٢٠ د) − ٢٠

٩) إذا كان ق′(س) مشتقة ق(س) وكان: ق(−٢) = ٤ ، ق(٣) = −٦ ، فما قيمة $\int_{-٢}^{٣} \frac{ق'(س)}{٢} \, ءس$ ؟

أ) −٥ ب) ٥ ج) −١٠ د) −١

١٠) إذا كان: $\int_{ب}^{١} (ب) \, ءس + ٢٠ = ٠$ ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟

أ) ٤، −٥ ب) −٤، ٥ ج) −٤ د) ٥

١١) إذا كان $\int ق'(س) = (٢س^{٣} - ٣س + جـ)$ ، فما قيمة ق′(−١)؟

أ) −١٢ ب) ٣ ج) ١ د) −٤، ٣

١٢) إذا كانت $\begin{bmatrix} \frac{س}{٣} & ٣ \\ س - ٢ص & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ -٩ & -٢ \end{bmatrix}$ ، فما قيمتي س ، ص على الترتيب ؟

أ) −٣، ٣ ب) ٣، −٣ ج) −٣، −٣ د) −٣، ٣

١٣) إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٠ \\ -٦ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٩ & \sqrt{٤} \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $٢ب_{١×٢} + أ_{٢×٣}$؟

أ) ١٢ ب) ٨ ج) ٦ د) ٢٢

إعداد المعلم: سائد الحلاق

١٤) إذا كانت المصفوفة ع = ص + ٣س وكانت $ع_{٢٢} = -١٠$ ، $ص_{٢٢} = ٥$ ، فما قيمة المدخلة $س_{٢٢}$؟

أ) −١٥ ب) −٥ ج) −٣ د) ٥

١٥) إذا كانت كان أ ، ب ، جـ مصفوفات: بحيث : $أ_{ن×م} \times ب_{٢×٣} = جـ_{٤×٣}$ ، فإن ن + م = ...

أ) ٨ ب) ٧ ج) ٦ د) ٥

١٦) إذا كانت : ص = $\begin{bmatrix} -٥ & أ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $ص^{-١} = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٣ & ب \end{bmatrix}$ ، فما قيمتي أ ، ب على الترتيب ؟

أ) −٣، ٢ ب) ٣، −٢ ج) −٣، −٢ د) ٣، ٢

١٧) إذا كانت ص مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ × ٢ وكان: $|-٢ص| = ١٦$ ، فما قيمة: $\sqrt{٤}\,|ص| + |\sqrt{٢}\,ص|$ ؟

أ) −٨ ب) ١٦ ج) صفر د) ٢٤

١٨) ما قيمة / قيم س التي تحقق $\begin{vmatrix} ٦ & ٢س \\ س & ٦ \end{vmatrix} = ٣٦$ ؟

أ) $\sqrt{٧٢}$ ب) −٦ ج) ٦ د) −٦،٦

١٩) إذا كان $\frac{أ}{٢} = ٣ب^{-١}$ ، فما المصفوفة التي تمثل ب أ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ٦ \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

٢٠) عند استخدام قاعدة كريمر في حل نظام من المعادلات الخطية نتج أن $|أ| = -١$ ، $|أ_س| = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٨ & ٣ \end{vmatrix}$ ، $|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٥ & ٨ \end{vmatrix}$ ،

فما قيمتي س ، ص على الترتيب ؟

أ) −١،−١ ب) ١،١ ج) ١،−١ د) −١،١

السؤال الثاني : (٢٠) علامة

١) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س في الفترة[−١،٢] هو −١٢ ، جد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = س ق(س) + س في نفس الفترة ، علماً بأن ق(٢) = ٧ .

٢) جد $\int \left(-\frac{٤}{س^٢} + \frac{٣}{٢}\sqrt{س} + ٧س^{\frac{٣}{٤}} \right) ءس$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٣) حل المعادلة المصفوفية : $٣\left(س - \begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} \right) = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٢- & ٦ \\ ٤- & ٢ \end{bmatrix} + ٢م_٢$

السؤال الثالث : (٢٠) علامة

١) إذا كان الإقتران ق(س) = $س^٣ - ٣س + ٣$ ، س ∈ ح ، جد:

أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على ح

ب) القيم القصوى للاقتران ق(س) ، ثم حدد نوعها.

٢) حل المعادلة التالية: $\begin{vmatrix} ٢ & س \\ (١-س) & ١- \end{vmatrix} = ٢\begin{vmatrix} ٠ & س \\ ١ & س- \end{vmatrix}$

٣) جد قاعدة الاقتران ق(س) عندما ق′(س) = $٣س^٢ + ٢$، الذي يمر بالنقطة (٢،−٦)

السؤال الرابع : (٢٠) علامة

١) استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات التالي: ٣ص = −٥س + ٧ ، ٢ص − س + ٤ = ٠

٢) إذا كان : $\int_{١}^{٢} ٢\text{ق}(\text{س})\,.\text{ءس} + ٣ = -٥$ ، $\int_{١}^{٣} (\text{ق}(\text{س}) + ٣)\,.\text{ءس} = ٧$ ، فما قيمة $\int_{٢}^{٣} (\text{ق}(\text{س}) + ٥)\,.\text{ءس}$ ؟

٣) إذا كان : $\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{\text{ق}(\text{س})}{٢\text{س}} - ٣\sqrt[٣]{\text{س}}$ ، جد هـ′(١) ، إذا علمت أن : ق′(١) = −١ ، هـ(١) = $\dfrac{٥}{٢}$

القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط:

السؤال الخامس : (١٠) علامات

١) إذا كان $(\text{س} \times \text{ص})^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\text{س} \times \text{ع} = \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ -٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ، بين أن : $\text{س}(\text{ص} + \text{ع}) = ٢\text{م}_{٢}$

٢) إذا كان متوسط تغير الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} + \sqrt{٩\text{س}^{٢} + ١٢}$ ، للفترة [أ ، ٣أ] يساوي ١١

فما قيمة الثابت أ ؟

إعداد المعلم : سائد الحلاق

السؤال السادس : (١٠) علامات

١) ليكن الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + ٣$ ، وكان ق′(١) = −٢ ، ق(١) = ٤ ، فما قيمة الثابتين أ، ب ؟

٢) إذا كان $\int_{٢}^{٥} \left(٢\text{هـ}'(\text{س}) + \text{ق}'(\text{س}) + ٢\text{س}\right).\text{ءس} = ٢٥$ وكان : ٣هـ(٥) = ٣ ، ٢هـ(٢) = −٣ ،

٢(ق(٥) − ق(٢)) = ٤ب − ٢ ما قيمة / قيم الثابت ب ؟

إنتهى

دولة فلســـــــــطين وزارة التربية والتعليم العالي مديرية التربية والتعليم ـــ جنوب الخليل	امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول		الاسم:	
	مادة الاختبار	الرياضيات		
	عدد الصفـــحات	٣	المدرسة:		العلامة
	التاريخ:		الصف:	الثاني عشر أدبي وشرعي ( )	
	العام الدراسي	٢٠١٩/٢٠٢٠م	الزمن:	ساعتان	٦٠

ملاحظة : عدد أسئلة الاختبار " ستة " أسئلة أجب عن خمسة منها فقط

القسم الأول : يتكون هذا القسم من (٤) أسئلة وعلى المشترك الإجابة عنها جميعا:

السؤال الأول : (١٨) علامات

يتكون هذا السؤال من (١٢) فقرة من نوع اختيار من متعدد ، من أربعة بدائل ، اختر رمز الإجابة الصحيحة :

١) ما متوسط تغير الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٢}$ عندما تتغير س من $\text{س}_١ = ١١$ إلى $\text{س}_١ = ١٨$ ؟

أ) $\frac{١}{٧}$ ب) ٧ ج) −٧ د) $\frac{١}{٥}$

٢) إذا كانت : $\text{ص} = \pi^٢ + \int_{-١}^{٢} ٢\text{س}^٤ .\, \text{ds}$ فما قيمة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

أ) ١ ب) ٢π ج) $\frac{\pi}{٣}$ د) صفر

٣) إذا كان الاقتران ق ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان $\text{ق}(١) = ٥$ ، $\text{ق}'(١) = ٢$ ، $\text{هـ}(١) = ٤$ ، $\text{هـ}'(١) = -١$

فما قيمة $(٢\text{ق} \times \text{هـ})'(١)$؟

أ) ٣ ب) −١٥ ج) −١٨ د) ٦

٤) إذا كان $\int \text{ق}'(\text{س}) = (٣\text{س}^٢ - ٤\text{س} + \text{جـ})$ ، فما قيمة $\text{ق}'(٢)$؟

أ) ١٢ ب) ٤ ج) −٢ د) ٨

٥) إذا كان $\int_{٣}^{٥} \text{ب}.\text{دس} = \int_{٠}^{٢} ٢\text{س}.\text{دس}$ ، فما قيمة الثابت ب؟

أ) −٢ ب) ٢ ج) ٣ د) −٤

٦) إذا كان أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكان $|٢\text{أ}| = ١٦$ ، فما قيمة $\left|\frac{١}{٢}\text{أ}\right|$ ؟

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) ١ ج) ٢ د) ٤

٧) إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} -١ & س \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي ، فما قيمة س ؟

أ) -١ ب) -٢ ج) ١ د) ٢

٨) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٩ \\ ٢ & -٨ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $أ_{١٢} - ب_{٢١}$؟

أ) -٣ ب) ٣ ج) ١ د) -٢

٩) إذا كان $\begin{bmatrix} ٢ & س \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ \\ س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة س السالبة؟

أ) -٣ ب) -٥ ج) -٩ د) -١٩

١٠) إذا كان: $ق(س) = \int \frac{س+١}{س^٢-٢} . ءس$ ، فما قيمة $ق'(١)$ ؟

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) -٢ د) ٢

١١) ما ميل القاطع لمنحنى الاقتران $ق(س) = ٣س^٢ - ٢$ ، المار بالنقطتين $(-١، ق(-١))$ ، $(٢، ق(٢))$؟

أ) ٣ ب) -٦ ج) ٢ د) ٩

١٢) إذا كان $ق(س) = ٦ \sqrt[٣]{س^٥}$ ، فما قيمية $ق'(٨)$ ؟

أ) $\frac{١}{٤٨}$ ب) -٤ ج) ٤٨ د) ٤

إعداد المعلم : سائد الحلاق

السؤال الثاني : (١٢) علامة

أ) إذا كان الإقتران $ق(س) = ٣س^٣ - ٩س + ٥$ ، $س \in ح$ ، أوجد:

١) فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س)$ على ح

٢) القيم القصوى للاقتران $ق(س)$ ، ثم حدد نوعها.

ب) استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات التالي: $س + ص = ٧$ ، $ص = ٢س + ١$

السؤال الثالث : (١٢) علامة

أ) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -٣ & ٦ \end{bmatrix}$ ، أوجد ما يلي:

١) $|٢أ + ب|$ ٢) $أ.ب$ ٣) $(-٢أ)^{-١}$

ب) إذا كان : $\int_{٥}^{٧} ٢ق(س).ءس = ٦$ ، $\int_{٥}^{١} (ق(س)).ءس = ٤$ ، فما قيمة $\int_{١}^{٧} (٣ق(س) + ٢).ءس$

السؤال الرابع : (١٢) علامة

أ) حل المعادلة المصفوفية : $٢\left(٢س + \begin{bmatrix} ١٠ & ٨ \\ ٠ & -١١ \end{bmatrix}\right) = س + \begin{bmatrix} ٨ & -٧ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

ب) جد قيمة $\int \left(٦س^{-٤} + \frac{٢}{٥س^{٢}}\right).ءس$

ج) إذا كان : $ق(س) = \frac{٣س + ١}{٢س}$ ، $س \neq ٠$ ، أوجد $ق'(١)$

القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى الطالب الإجابة عن سؤال واحد فقط

السؤال الخامس : (٦) علامات

أ) إذا كان $ق(س) = أس^{٢} + ٨س - ب$ لهُ قيمة عظمى محلية عند النقطة $(٢،٥)$ ،أجد قيمة الثوابت أ،ب

ب) ما قيمة / قيم س التي تحقق المعادلة $س - ٢ \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & س \\ س & ٠ \end{vmatrix}$ ؟

السؤال السادس : (٦) علامات

أ) إذا كان $(أ)^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٢ & ٧ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، حل المعادلة $أ^{-١} \times (م_{٢} + أس) = ب$

ب) إذا كان $\left(\frac{ق}{هـ}\right)(س) = -٢س^{٣}$ ، $هـ(س) \neq ٠$ ، وكان : $ق(٢) = ٤$ ، $هـ(٢) = ٢$ ، $هـ'(٢) = ١٢$،
أوجد $ق'(٢)$

انتهت الأسئلة

أساسيات

بعض من التعريفات والمفاهيم والعلاقات الرياضية

أولاً : العمليات الأساسية على الأعداد الحقيقية

١ جمع الأعداد الحقيقية وطرحها

- عند جمع عددين متشابهين في الإشارة ، نجمع العددين وتبقى الإشارة كما هي .
  - $3+5=8$
  - $-3+-5=-8$
- عند جمع عددين مختلفين في الإشارة ، نضع إشارة العدد الأكبر ثم نطرح العد
  - $-3+5=2$
  - $3+-5=-2$
- عند طرح عددين نحول الطرح إلى جمع ونعكس إشارة المطروح ، ثم نطبق قواعد الجمع
  - $-3-5=-3+-5=-8$
- عندما تأتي الإشارة السالبة بعد عملية الطرح (المطروح يكون سالب) يتم دمج الاشارتين وتصبح موجب
  - $-3--5=-3+-5=-8$

٢ ضرب الأعداد الحقيقية وقسمتها

إعداد المعلم : سائد الحلاق

- عند ضرب أو قسمة عددين متشابهين بالإشارة (موجبين أو سالبين) ، فأن إشارة العدد الناتج موجباً دائماً.
  - $3\times5=15$
  - $-3\times-5=15$
  - $24\div6=4$
  - $-24\div-6=4$
- عند ضرب أو قسمة عددين مختلفين بالإشارة (موجبين أو سالبين) ، فإن إشارة العدد الناتج سالباً دائماً.
  - $-3\times5=-15$
  - $3\times-5=-15$
  - $-24\div6=-4$
  - $24\div-6=-4$

٣ أولويات إجراء العمليات الحسابية

الأقواس ، الأسس ، الضرب والقسمة بدءاً من اليمين ثم الجمع والطرح بدءاً من اليمين .

- $(2+3)\times5=5\times15=75$
- $12\div(4-1)=12\div3=4$
- $2+3\times5=2+15=17$
- $12\div4-1=3-1=2$

ثانياً حل المـعــادلات

١ حل المعادلة الخطية:

المعادلة : هي عبارة رياضية تحتوي على متغيرات وثوابت واشارة مساواة .

مثال أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات الخطية التالية :

مديرية التربية والتعليم - أ. سائد الحلاق - غرب غزة

١) $٥\text{س} - ٤ = -١٩$

$٥\text{س} = -١٩ + ٤$

$\frac{٥}{٥}\text{س} = \frac{-١٥}{٥}$

$\text{س} = -٣ \quad \leftarrow \quad \text{م.ح} = \{-٣\}$

٢) $-٤\text{س} + ٧ = -٨ + \text{س}$

$-٤\text{س} - \text{س} = -٨ - ٧$

$\frac{-٥}{-٥}\text{س} = \frac{-١٥}{-٥}$

$\text{س} = ٣ \quad \leftarrow \quad \text{م.ح} = \{٣\}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٢ حل معادلة تربيعية باستخدام التحليل إلى العوامل:

مثال أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية :

١) $\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ١٥ = ٠$

س – ٥
س – ٣

$(\text{س} - ٥)(\text{س} - ٣) = ٠$

$\text{س} - ٥ = ٠ \qquad \text{س} - ٣ = ٠$

$\text{س} = ٥ \qquad \text{س} = ٣$

$\therefore \text{م.ح} = \{٣ ، ٥\}$

٢) $\text{س}^٢ - \text{س} - ٢٠ = ٠$

س – ٥
س + ٤

$(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٤) = ٠$

$\text{س} - ٥ = ٠ \qquad \text{س} + ٤ = ٠$

$\text{س} = ٥ \qquad \text{س} = -٤$

$\therefore \text{م.ح} = \{-٤ ، ٥\}$


٣ حل معادلتين خطيتين جبرياً:

مثال ١

أوجد مجموعة حل المعادلتين الخطيتين التاليتين بطريقة **الحذف** :

● ٣س – ص = ٥ ، س + ص = ٣

٣س ~~– ص~~ = ٥ $\boxed{١}$
س ~~+ ص~~ = ٣ $\boxed{٢}$

٤س = ٨ ← س = ٢

نعوض عن قيمة س في المعادلة $\boxed{٢}$

← ٢ + ص = ٣ ⟸ ص = ١

∴ م.ح = {٢ ، ١}

مدرسة التقوى الثانوية للبنين
أ. سائد الحلاق
مديرية غرب غزة

مثال ٢

أوجد مجموعة حل المعادلتين التاليتين بطريقة **التعويض** :

● ٤س + ٢ص = ١٠ ، س ص = ٢

٤س + ٢ص = ١٠ $\boxed{١}$
س × ص = ٢ $\boxed{٢}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

من معادلة $\boxed{١}$ نجعل ص موضع قانون ⟸ ٢ص = ١٠ – ٤س ⟸ $\boxed{\text{ص = ٥ – ٢س}}$

عوض عن ص = ٥ – ٢س في المعادلة $\boxed{٢}$ ⟸ س(٥ – ٢س) = ٢ ⟸ ٥س – ٢س^{٢} = ٢

⟸ ٢س^{٢} – ٥س + ٢ = صفر ⟸ (٢س – ١)(س – ٢) = صفر

٢س ╲╱ –١
س ╱╲ –٢

إما ٢س – ١ = ٠ ⟸ س = $\frac{١}{٢}$ ومنها ص = ٥ – ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ٥ – ١ = ٤

أو س – ٢ = ٠ ⟸ س = ٢

ومنها ص = ٥ – ٢ × ٢ = ٥ – ٤ = ١

م.ح = {($\frac{١}{٢}$ ، ٤) ، (٢ ، ١)}


ثالثاً

تحليل كثيرات الحـــــــــدود

١ التحليل بإخراج عامل مشترك:

مثال

حلل:

١) $٤س^{٢} - ٨س = ٤س\,(س - ٢)$

٢) $٦س - ٣س^{٢} = ٣س\,(٢ - س)$

٢ تحليل الفرق بين مربعين:

مثال

حلل:

١) $س^{٢} - ١٦ = (س - ٤)(س + ٤)$

٢) $س^{٢} - ٧ = (س - \sqrt{٧})(س + \sqrt{٧})$

٣ تحليل الفرق بين مكعبين:

مثال

حلل:

إعداد المعلم: سائد الحلاق

$س^{٣} - ٢٧ = (س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)$

٤ تحليل مجموع مكعبين:

مثال

حلل:

$س^{٣} + ٦٤ = (س + ٤)(س^{٢} - ٤س + ١٦)$

٥ مفكوك القوس التربيعي:

مثال

حلل:

١) $(س + ٥)^{٢} = س^{٢} + ١٠س + ٢٥$

٢) $(س - ٦)^{٢} = س^{٢} - ١٢س + ٣٦$

رابعاً   بعض من أنواع الاقترانات

١ الاقتران الثابت

$\text{ق}(\text{س}) = \text{جـ}$ ، $\text{جـ} \in \text{ح}$ ، عند تمثيله في المستوى الديكارتي يكون خط مستقيم يوازي محور السينات.

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ١٢$ ، فما قيمة $\text{ق}(٣)$ ؟

الحل

$\text{ق}(٣) = ١٢$

مدرسة ... أ. سائد الحلاق ... غرب غزة

٢ الاقتران الخطي

هو اقتران كثير حدود من الدرجة الأولى ، وعند تمثيله في المستوى الديكارتي يكون خط مستقيم .

$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س} + \text{ب}$ ، $\text{أ}، \text{ب} \in \text{ح}$ ، $\text{أ} \neq ٠$

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} + ٣$، فما قيمة $\text{ق}(٢)$ ؟

الحل

$\text{ق}(٢) = ٢ \times ٢ + ٣ = ٤ + ٣ = \boxed{٧}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

٣ الاقتران التربيعي

هو اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية .

$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^٢ + \text{ب}\text{س} + \text{جـ}$ ، $\text{أ}، \text{ب}، \text{جـ} \in \text{ح}$ ، $\text{أ} \neq ٠$

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٥$، فما قيمة $\text{ق}(٤)$ ؟

الحل

$\text{ق}(٤) = (٤)^٢ + ٣ \times ٤ - ٥ = ١٦ + ١٢ - ٥ = \boxed{٢٣}$

٤ الاقتران التكعيبي

هو اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة .

$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^٣ + \text{ب}\text{س}^٢ + \text{جـ}\text{س} + \text{د}$ ، $\text{أ}، \text{ب}، \text{جـ}، \text{د} \in \text{ح}$ ، $\text{أ} \neq ٠$

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣ + ٢\text{س} + ١$، فما قيمة $\text{ق}(١)$ ؟

الحل

$\text{ق}(١) = ١^٣ + ٢ \times ١ + ١ = ١ + ٢ + ١ = \boxed{٤}$


خامساً : قـــوانين الأســـــس واللوغاريتمات

١ الأسس

لتكن أ ، م ، ن $\in$ ع

$أ^{صفر} = ١$ حيث $أ \neq ١$ ، $١^{أ} = ١$

$(-١)^{ن} = -١$ إذا كان ن عدد فردي ، $(-١)^{ن} = ١$ إذا كان ن عدد زوجي

بعض قوانين الأسس		
م	القانون	المثال
١	$أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$	$٣^{٢} \times ٣^{٤} = ٣^{٢+٤} = ٣^{٦}$
٢	$\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$	$\frac{٤^{٧}}{٤^{٤}} = ٤^{٧-٤} = ٤^{٣}$
٣	$(أ^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$	$(أ^{٣})^{٥} = أ^{١٥}$
٤	$أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}}$	$٨^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{٨^{٢}} = \sqrt[٣]{٦٤} = ٨$
٥	$\frac{١}{أ^{م}} = أ^{-م}$ ، $\frac{١}{أ^{-م}} = أ^{م}$	$\frac{١}{أ^{٢}} = أ^{-٢}$ ، $\frac{١}{أ^{-٥}} = أ^{٥}$
٦	$أ^{ن} = أ^{م} \Leftarrow ن = م$ (إذا تساوت الأساسات تساوت الأسس)	

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٢ اللوغاريتمات

لتكن أ ، م ، ن $\in$ ع

١) $لو_{أ}\, س = جـ$ تكافئ $أ^{جـ} = س$ ، $أ > ٠$ ، $س > ٠$ ، $أ \neq ١$

٢) $لو_{أ}\, أ = ١$ ، $أ > ١$ ، $لو_{أ}\, ١ = ٠$ ، $أ > ١$

٣) $لو_{أ}\, (أ)^{ن} = ن \times لو_{أ}\, أ = ن$ ، $س > ٠$

٤) $لو_{أ}\, (س \times ص) = لو_{أ}\, س + لو_{أ}\, ص$

٥) $لو_{أ}\, (س \div ص) = لو_{أ}\, س - لو_{أ}\, ص$

تم بحمد الله


وفي خاتمة هذا العمل أُذكر نفسي وغيري بقول الله تعالى:

"وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ۖ وَسَتُرَدُّونَ إِلَىٰ عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُمْ بِمَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ"

وقد كانت رحلة جاهدة للارتقاء بدرجات العقل ومعراج الأفكار

فما هذا الا جهد مقل ولا أدعي فيه الكمال ولكن عذري أني بذلت فيه قصارى جهدي فإن أصبت فذاك مرادي

وان لم أُصب فلي شرف المحاولة والتعلم ...

ولكن هذا جهد قليل في مقابل خدمة جميع طلبة فلسطين .

وأخيرا أعزائي الطلبة يمكنكم متابعتي عبر مجموعة شبكة رياضيات فلسطين

على الرابط

إعداد المعلم: سائد الحلاق

https://www.facebook.com/groups/360785677395726/?ref=bookmarks

أو التواصل لأي استفسار عبر رقم الجوال : **0599632532**

تم بحمد الله

شرح المنهاج - تدريبات شاملة
أسئلة اختبارات سابقة

أ. سائد زياد الحلاق
جوال: 0599632532