

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين
وَأَزَلُّوا التَّيْبَةَ وَالنَّجْلِيْمَ

الرياضيات

الفرع العلمي والصناعي

الفترة الثانية

الطبعة الثانية

٢٠٢٠ م / ١٤٤١ هـ

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وَأَزَلُّوا التَّيْبَةَ وَالنَّجْلِيْمَ



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

facebook.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على
توظيف تطبيقات التفاضل في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- ١ إيجاد فترات التزايد والتناقص والنقاط الحرجة لاقتران معلوم.
- ٢ إيجاد القيم العظمى والصغرى لمنحنى اقتران معلوم.
- ٣ إيجاد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف لمنحنى اقتران معلوم.
- ٤ تحديد خصائص اقتران، إذا علم منحنى إحدى مشتقاته.
- ٥ توظيف القيم القصوى المطلقة في حل مسائل حياتية.
- ٦ التعرف إلى المصفوفة، وبعض المصفوفات الخاصة.
- ٧ إيجاد رتبة المصفوفة.
- ٨ التعرف إلى شروط تساوي مصفوفتين، وحل معادلات ناتجة من تساويهما.
- ٩ إجراء العمليات على المصفوفات.
- ١٠ التعرف إلى مفهوم المحددات.
- ١١ حساب محدد المصفوفات المربعة من الرتبة الأولى والثانية والثالثة، وتمييز المنفردة منها.
- ١٢ إيجاد النظر الضربي للمصفوفات المربعة غير المنفردة من الرتبة الثانية.
- ١٣ توظيف المصفوفات في حل أنظمة معادلات خطية.

المحتويات

٣	١ - ٢ الاقترانات المتزايدة والمتناقصة (Increasing and Decreasing Functions)
٧	٢ - ٢ القيم القصوى (Extreme Values)
١٤	٣ - ٢ التقعر و نقاط الانعطاف (Concavity and Points of Inflection)
١٩	٤ - ٢ تطبيقات عملية على القيم القصوى (Applications of Extrema)
٢٣	٥ - ٢ المصفوفة (Matrix)
٢٦	٦ - ٢ العمليات على المصفوفات (Operations on Matrices)
٣٢	٧ - ٢ المحددات (Determinants)
٣٥	٨ - ٢ النظر الضربي للمصفوفة المربعة (Inverse of a Square Matrix)
٣٨	٩ - ٢ حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات (Solving Systems of Linear Equations)

البند التي باللون الأحمر تستثنى من الفرع الصناعي

تعريف:

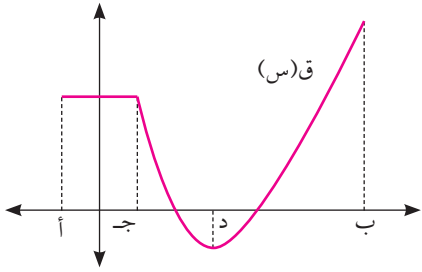


يكون منحنى الاقتران ق(س) المعروف في $[أ، ب]$ ، $س_١$ ، $س_٢ \in [أ، ب]$

١ متزايداً في $[أ، ب]$ إذا تحقق الشرط: عندما $س_١ > س_٢$ فإن $ق(س_١) > ق(س_٢)$

٢ متناقصاً في $[أ، ب]$ إذا تحقق الشرط: عندما $س_١ > س_٢$ فإن $ق(س_١) < ق(س_٢)$

٣ ثابتاً في $[أ، ب]$ إذا تحقق الشرط: عندما $س_١ > س_٢$ فإن $ق(س_١) = ق(س_٢)$



في الشكل المجاور، حدد الفترات التي يكون فيها منحنى الاقتران ق(س) متزايداً، أو متناقصاً، أو ثابتاً.

مثال ١ :

يكون منحنى الاقتران ق(س) ثابتاً في $[أ، ج]$ ويكون متناقصاً في $[ج، د]$ لأنه كلما زادت قيمة س في الفترة $[ج، د]$ تقل قيمة ق(س)، ويكون متزايداً في $[د، ب]$ (لماذا؟)

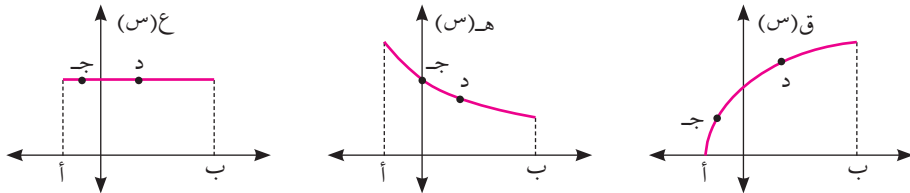
الحل :

(ملاحظة : لا يطلب من الطالب التحقق من التزايد والتناقص جبرياً باستخدام التعريف)

التزايد والتناقص باستخدام اختبار المشتقة الأولى

الشكل أدناه يمثل منحنيات الاقترانات : ق(س)، هـ(س)، ع(س) المعرفة في الفترة $[أ، ب]$ ، معتمداً عليها قم بما يأتي:

نشاط :



- ١ حدد أي الاقترانات السابقة يكون منحناه متزايداً، وأيها متناقصاً، وأيها ثابتاً في الفترة $[أ، ب]$.
- ٢ ارسم لكل منحنى مماساً عند النقطة جـ ومماساً عند النقطة د.
- ٣ نوع زاوية الميل للمماسات المرسومة هي
- ٤ إشارة ظل زاوية ميل المماس لكل من المماسات التي رسمت هي (لماذا؟)
- ٥ ما إشارة كل من ق(س)، هـ(س)، ع(س) في $[أ، ب]$ ؟
- ٦ ما العلاقة بين فترات التزايد والتناقص وإشارة المشتقة الأولى للاقتران؟

نظرية:



إذا كان ق(س) اقتراناً متصلًا في $[أ، ب]$ وقابلًا للاشتقاق في $[أ، ب]$ فإن منحنى:

- ١ الاقتران ق(س) يكون متزايداً في $[أ، ب]$ إذا كانت ق(س) < صفر، $\forall س \in [أ، ب]$
- ٢ الاقتران ق(س) يكون متناقصاً في $[أ، ب]$ إذا كانت ق(س) > صفر، $\forall س \in [أ، ب]$
- ٣ الاقتران ق(س) يكون ثابتاً في $[أ، ب]$ إذا كانت ق(س) = صفر، $\forall س \in [أ، ب]$

مثال ٢:

جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) علماً بأن:

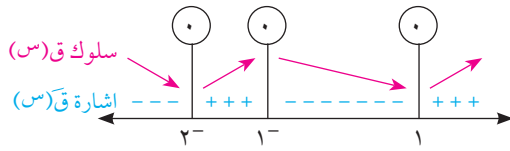
$$ق(س) = (س - ٢)(١ - س)، س \in ح$$

الحل:

نضع ق(س) = صفر، ومنها $(س - ٢)(١ - س) = ٠$

$$\text{ومنها } (س - ٢) = ٠ \text{ أو } (١ - س) = ٠ \text{ أو } س = ٢^- \text{ أو } س = ١^-$$

فينتج أن $س = ١^-$ أو $س = ٢^-$ من إشارة ق(س) في الشكل المجاور يكون:



منحنى ق(س) متناقصاً في $[-\infty، ٢^-]$ ، $[١^-، ١]$ ، و متزايداً في $[١^-، ٢^-]$ ، $[١، \infty]$.

مثال ٣:

عيّن فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $س^٤ + س^٤ + ٥$ ، $س \in ح$

الحل:

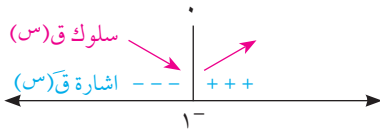
ق(س) متصل في ح لأنه كثير حدود.

$$ق(س) = س^٤ + س^٣ + ٤ = ٠ \text{ ومنها } س^٣ + ١ = ٠ \text{ فتكون } س = ١^- \text{ (لماذا؟)}$$

ومن إشارة ق(س) في الشكل المجاور:

يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترة $[١^-، \infty]$

ومتناقصاً في الفترة $[-\infty، ١^-]$.



مثال ٤:

عيّن فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $\frac{١ - س}{١ + س}$ ، $س \neq ١^-$

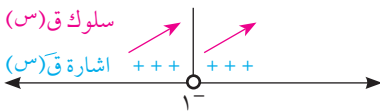
الحل:

$$ق(س) = \frac{١ - س}{١ + س} = ٠ \text{ ، } س \neq ١^- \text{ متصل في ح - } \{١^-\}$$

$$ق(س) = \frac{٢}{٢(١ + س)}$$

$$ق(س) \neq ٠ \text{ ، } \forall س \in ح - \{١^-\}$$

والشكل المجاور يبيّن إشارة ق(س)



ومنه يكون منحنى الاقتران ق(س) متزايداً في الفترتين $[-\infty، ١^-]$ ، $[١^-، \infty]$



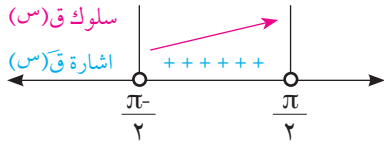
في المثال السابق هل يمكن القول أن ق(س) متزايد في ح - {١-}؟

مثال ٥ : أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) = ٢س + ظاس متزايد في الفترة $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

الحل : ق(س) متصل وقابل للاشتقاق في الفترة $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ (لماذا؟)

$$ق'(س) = (٢ + ٢سا) \neq ٠$$

ومن إشارة ق'(س) في الشكل المجاور



يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترة $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

مثال ٦ : عيّن فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) = |٤ - ٢س| ، س ∈ [٢، ٣-]

الحل : نكتب ق(س) دون استخدام رمز القيمة المطلقة. *

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س - ٤ & ٢ \leq س \leq ٣- \\ ٤ - ٢س & ٢ \geq س \geq ٢- \end{cases}$$

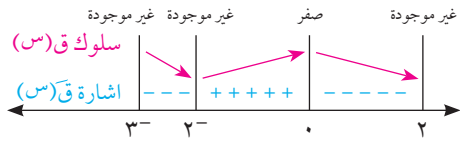
ق(س) متصل في الفترة [٢، ٣-] لأنه اقتران قيمة مطلقة لاقتران متصل

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س > ٣- ، ٢- > س > ٢- \\ ٢س - ٢ > ٢- ، ٢ > س > ٢- \end{cases}$$

ق(س) غير موجودة عندما س = ٢، ٢-، ٣- (لماذا؟)

نجعل ق(س) = ٠ ، ومنها س = ٠

ومن إشارة ق'(س) في الشكل المجاور يكون



منحنى ق(س) متزايداً في [٠، ٢-]

ومتناقصاً في [٢-، ٣-] ، [٢، ٠]

* سنتنصر دراستنا على الاقترانات متعددة القاعدة والمتصلة.

١ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

أ ق(س) = $3س^3 - 2س^2$ ، $س \in]-2, 5[$

ب ق(س) = $س + جا^س$ ، $س \in]0, \pi[$

٢ إذا كان ق(س) = $2س - لو(س + 1)$ ، $س < 1$ ، فأثبت أن منحنى ق(س) متزايد في ح⁺.

٣ جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) = $\left. \begin{array}{l} 0 \leq س < 1 ، س^3 \\ 1 \leq س < 2 ، 1 - 2س^2 \end{array} \right\}$ في الفترة $[0, 2]$

٤ إذا كان ق(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق على ح ، وكان ك(س) = $ق^2(س) + هـ^2(س) + س^2$ ، فحدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ك(س) ، علماً بأن ق(س) = هـ(س) ، هـ(س) = هـ(س) = ق(س).



تعريف القيم الصغرى والعظمى المحلية:

ليكن $ق(س)$ اقتراناً معرفاً على المجال $ع$ ، ولتكن $ج \in ع$ ، عندها يكون للاقتران $ق(س)$:

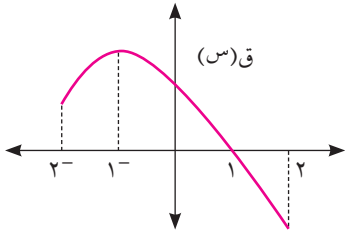
١ قيمة عظمى محلية عند $س = ج$ هي $ق(ج)$ إذا وجدت فترة مفتوحة $(ف)$ تحوي $ج$ ، بحيث أن $ق(ج) \leq ق(س)$ لجميع قيم $س \in (ف \cap ع)$

٢ قيمة صغرى محلية عند $س = ج$ هي $ق(ج)$ إذا وجدت فترة مفتوحة $(ف)$ تحوي $ج$ ، بحيث أن $ق(ج) \geq ق(س)$ لجميع قيم $س \in (ف \cap ع)$

٣ قيمة عظمى مطلقة عند $س = ج$ هي $ق(ج)$ إذا كانت $ق(ج) \leq ق(س)$ لجميع قيم $س \in ع$

٤ قيمة صغرى مطلقة عند $س = ج$ هي $ق(ج)$ إذا كانت $ق(ج) \geq ق(س)$ لجميع قيم $س \in ع$

ملاحظة: تسمى كل من القيم العظمى والقيم الصغرى قيماً قصوى، سواء أكانت محلية أم مطلقة.



يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران $ق(س)$ في الفترة $[2-, 2-]$ ، اعتمد عليه في إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت). ثم جد قيمة المشتقة الأولى عند كل قيمة منها (إن وجدت).

مثال ١:

يوجد للاقتران $ق(س)$ قيمة صغرى محلية عندما $س = 2-$ هي $ق(2-)$

لأنه يوجد فترة مفتوحة مثل $ف =]3-, 1-]$ تحوي العدد $2-$

بحيث أن $ق(2-) \geq ق(س) \forall س \in]3-, 1-]$

$ق(2-)$ غير موجودة (لماذا؟)

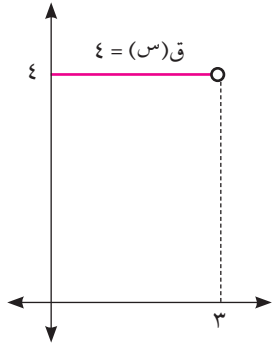
وأيضاً $ق(1-)$ قيمة عظمى محلية وهي مطلقة لأن $ق(1-) \leq ق(س) \forall س \in]2-, 2-]$

$ق(1-) = 0$ (لماذا؟)

$ق(2)$ قيمة صغرى محلية وهي مطلقة لأن $ق(2) \geq ق(س) \forall س \in]2-, 2-]$

$ق(2)$ غير موجودة (لماذا؟)

الحل:



مثال ٢ :

إذا كان $q(s) = \epsilon$ ، $s \in]3, 0]$

جد القيم القصوى المحلية للاقتزان $q(s)$.

الحل :

$q(s)$ متصل في $]3, 0]$

$q(s) = 0 \forall s \in]3, 0]$

وحسب التعريف $\forall s \in]3, 0]$ يوجد قيمة صغيرة محلية هي ϵ

لأن $q(s) \leq \epsilon \forall s$ في تلك الفترة

كما أنه حسب التعريف $\forall s \in]3, 0]$ يوجد قيمة عظمى محلية هي ϵ

لأن $q(s) \geq \epsilon \forall s$ في تلك الفترة

فكر وناقش:



ما صحة القول أن القيمة العظمى المحلية للاقتزان دائماً أكبر من القيمة الصغيرة المحلية له؟

تعريف:



تسمى النقطة (أ، ق) نقطة حرجة للاقتزان $q(s)$ إذا كانت:

١ \exists مجال $q(s)$

٢ $q'(أ) = 0$ أو $q'(أ)$ غير موجودة.

مثال ٣ :

عين جميع النقط الحرجة للاقتزان $q(s) = \begin{cases} s^2 - 3, & 1^- > s \geq 2 \\ 3 - s, & 2 > s \geq 3 \end{cases}$ في $]3, 1^-[$

الحل :

$q(s)$ متصل عند $s = 2$ ، $q'(s) = \begin{cases} 2s, & 1^- > s > 2 \\ 3 - s, & 3 > s > 2 \end{cases}$

$q'(2)$ غير موجودة، $q'(3)$ غير موجودة، (لماذا؟)

نجعل $q'(s) = 0$ ومنها $s = 0 \in]3, 1^-[$

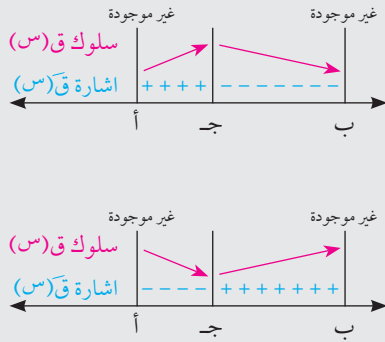
لا يوجد قيم لـ $s \in]3, 2[$ بحيث $q'(s) = 0$ (لماذا؟)

لا يوجد نقطة حرجة عند $s = 1^-$ لأنها لا تنتمي إلى مجال $q(s)$

ومنها النقط الحرجة هي $(0, 3)$ ، $(2, 1)$ ، $(3, 0)$

اختبار المشتقة الأولى لتعيين القيم القصوى

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلًا في الفترة [أ، ب] وكانت (ج، ق) نقطة حرجة للاقتران ق(س)،
ج ∈ [أ، ب] فإنه:



١ إذا كان ق(س) < ٠ عندما أ > س > ج،

وكان ق(س) > ٠ عندما ج > س > ب

فإن ق(ج) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

٢ إذا كان ق(س) > ٠ عندما أ > س > ج،

وكان ق(س) < ٠ عندما ج > س > ب

فإن ق(ج) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = س^٣ + س^٢ - ٥س - ٥

مثال ٤ :

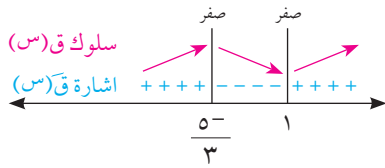
ق(س) اقتران متصل على ح لأنه كثير حدود

الحل :

ق'(س) = ٣س^٢ + ٢س - ٥ ، ∃ س ح ، نجعل ق'(س) = ٠

ومنها ٣س^٢ + ٢س - ٥ = ٠ أي أن (٣س + ٥)(س - ١) = ٠ ، إذن س = $\frac{٥^-}{٣}$ أو س = ١

ومن إشارة ق'(س) في الشكل المجاور تكون



ق(س) = $\frac{٤٠}{٢٧} = \frac{٥^-}{٣}$ قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

ق(١) = ٨⁻ قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

فكر وناقش:



هل يأخذ الاقتران ق(س) في المثال السابق قيماً قصوى مطلقة؟ حددها (إن وجدت).

جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = $\sqrt[٣]{س - ٨}$

مثال ٥ :

ق(س) متصل في ح

الحل :

ق'(س) = $\sqrt[٣]{س - ١} + (١ - س) \times \frac{١}{٣} س^{-\frac{٢}{٣}}$

ق'(س) = $\sqrt[٣]{س - ١} + \frac{(س - ٨)}{٢\sqrt[٣]{س}}$ ، ∃ س ح - {٠} (لماذا؟)

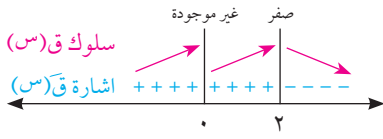
إذن ق(س) = $\frac{(س - ٨)}{٢\sqrt[٣]{س}}$

نجعل ق'(س) = ٠ ومنها ٨ - ٤س = ٠ ومنها س = ٢

ق(س) غير موجودة عند $s = 0$ (لماذا؟)

ومن إشارة ق(س) في الشكل المجاور،

يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س) عند $s = 2$
قيمتها ق(2) = $2\sqrt[3]{6}$



فكر وناقش:



هل يوجد قيم قصوى للاقتران عندما $s = 0$ في المثال السابق (لماذا؟)

$$\text{جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = } \frac{s^2 + 3}{s - 1}, \quad s \neq 1$$

مثال ٦ :

ق(س) متصل في ح - {1}

الحل :

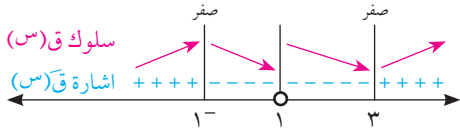
$$\text{ق(س) = } \frac{s^2 - 2s - 3}{s(1 - s)}, \quad s \neq 1$$

وبوضع ق(س) = 0 ينتج أن $s = 3$ أو $s = -1$

ومن إشارة ق(س) في الشكل المجاور تكون

ق(1-) = 2- قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

ق(3) = 6 قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)



اختبار أطراف الفترة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلًا في [أ، ب] وقابلًا للاشتقاق في]أ، ب[فإن:

- ١ ق(أ) قيمة صغرى محلية، إذا كانت ق(س) < 0 عندما $s < أ$ (بداية تزايد)
- ٢ ق(أ) قيمة عظمى محلية، إذا كانت ق(س) > 0 عندما $s < أ$ (بداية تناقص)
- ٣ ق(ب) قيمة عظمى محلية، إذا كانت ق(س) < 0 عندما $s > ب$ (نهاية تزايد)
- ٤ ق(ب) قيمة صغرى محلية، إذا كانت ق(س) > 0 عندما $s > ب$ (نهاية تناقص)

$$\left. \begin{aligned} & 1- \leq s \leq 2 \\ & s^2 \end{aligned} \right\} = \text{ق(س) إذا كان}$$

مثال ٧ :

١ جد مجموعة قيم س للنقط الحرجة للاقتران ق(س).

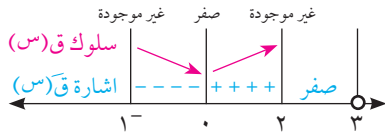
٢ حدّد الاحداثيات السينية للقيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).

١ ق(س) اقتران متصل في $[-1, 3]$

$$\left. \begin{array}{l} 2 > س > 1^- , \\ 3 > س > 2 , \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$

أولاً: عندما $س \in [-1, 2]$ نجعل ق(س) = 0فيكون $س = 2$ ومنها عند $س = 0$ يوجد نقطة حرجةثانياً: عندما $س > 2$ تكون ق(س) = 0وهذا يعني أنه عند كل $س \in [2, 3]$ يوجد نقطة حرجة

ق(2) غير موجودة، ق(1-) غير موجودة

فتكون مجموعة قيم س للنقط الحرجة $\{0, 1^-, 2, 3\}$ 

٢ من إشارة ق(س) في الشكل المجاور يكون

عند $س = 1^-$ يوجد قيمة عظمى محلية لأنها بداية تناقصعند $س = 0$ يوجد قيمة صغرى محليةعند $س = 2$ يوجد قيمة عظمى محليةعند كل $س \in [2, 3]$ يوجد قيمة عظمى محلية وصغرى محلية في آن واحد.

نظرية القيم القصوى المطلقة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب]

فإن ق(س) يتخذ قيمه القصوى المطلقة في الفترة [أ، ب].



مثال ٨:

جد أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران ق(س) = $\sqrt{s} - 4$ - $\sqrt{s^2}$

الحل :

بحل المتباينة $s^2 - 4 \leq 0$ ، نستنتج أن مجال ق(س) هو $[-2, 2]$

ق(س) متصل على $[-2, 2]$ ، ق(س) = $\frac{s^2 - 4}{\sqrt{s} - 4}$ ، $s \in [-2, 2]$

وعندما ق(س) = 0 يكون $s = \sqrt{2}$ - $[-2, 2]$

$s = -\sqrt{2}$ - $[-2, 2]$

ويكون ق(2-) = 0، ق($-\sqrt{2}$) = 2-

ق($\sqrt{2}$) = 2، ق(2) = 0

أصغر قيمة للاقتران هي ق($-\sqrt{2}$) = 2-

وأكبر قيمة للاقتران هي ق($\sqrt{2}$) = 2

أي أن القيمة العظمى المطلقة هي ق($\sqrt{2}$) = 2

والصغرى المطلقة هي ق($-\sqrt{2}$) = 2-

أتعلم:

إذا كان ق(س) متصلاً على فترة في مجاله، وكان له نقطة قيمة قصوى وحيدة فهي مطلقة في تلك الفترة.



١ جد النقط الحرجة للاقتارات الآتية:

أ ق (س) = $\frac{1}{3}س^٣ - ٢س^٢ + \frac{1}{٣}$ ، س $\in]٢^- ، ٣[$

ب ق (س) = $\frac{2}{3}س$ ، س $\in]٨^- ، ٨[$

٢ في التمارين من (أ - د) جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتاران ق (س) (إن وجدت)

أ ق (س) = $س^٣ - ٩س^٢ + ٢٤س$ ، س $\in]٣ ، ٤[$ ب ق (س) = $\sqrt{٢س - ٤}$

ج ق (س) = $(س^٢ - ٣)ه^س$ ، س $\in]٣ ، ٤[$ د ق (س) = $\frac{١ - س^٣}{١ - س}$ ، س $\neq ١$

٣ جد أكبر وأصغر قيمة (إن وجدت) لكل من الاقتارات الآتية:

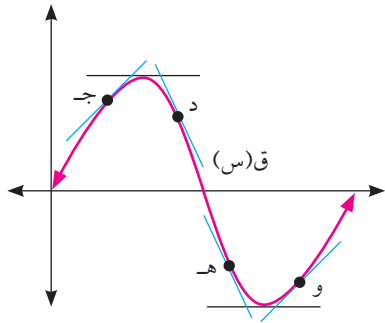
أ ق (س) = $\left. \begin{array}{l} ٢ \geq س \geq ٠ ، س^٣ \\ ٣ \geq س > ٢ ، ٤ + س^٢ \end{array} \right\}$ ، س $\in]٠ ، ٣[$

ب ق (س) = $ه^س - ه^{-س}$ ، س $\in]٠ ، ٣[$

ج ق (س) = $جتاس - \frac{1}{٣}جتا^٣س$ ، س $\in]\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٣}[$

نشاط:

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س)



- ١ ما إشارة ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند كل من ج، د؟ (لاحظ أن مماسي الاقتران ق(س) عند ج، د يقعان فوق منحناه)
- ٢ ما إشارة ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند هـ، و؟ (لاحظ أن مماسي الاقتران عند هـ، و يقعان تحت منحناه).

تعريف:

يقال لمنحنى الاقتران ق(س) أنه مقعر للأعلى في الفترة [أ، ب] إذا كان واقعاً فوق جميع مماساته في الفترة [أ، ب] وأنه مقعر للأسفل في الفترة [أ، ب] إذا كان واقعاً تحت جميع مماساته في الفترة [أ، ب].



اختبار التقعر باستخدام المشتقة الثانية*:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلًا في الفترة [أ، ب]، وكان ق''(س) معرفاً في الفترة [أ، ب] فإن منحنى ق(س) يكون:

- ١ مقعراً للأعلى في الفترة [أ، ب] إذا كانت ق''(س) < ٠ لجميع قيم س ∈ [أ، ب].
- ٢ مقعراً للأسفل في الفترة [أ، ب] إذا كانت ق''(س) > ٠ لجميع قيم س ∈ [أ، ب].
- ٣ غير مقعر للأعلى أو للأسفل في الفترة [أ، ب] إذا كانت ق''(س) = ٠ لجميع قيم س ∈ [أ، ب].

جد مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣س^٣ - ٢س^٢ - ٥س + ٥

مثال ١:

ق(س) متصل في [-٢، ٥] لأنه كثير حدود

الحل:

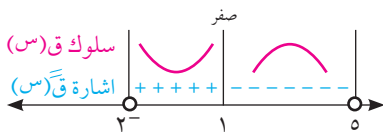
$$ق'(س) = ٩س^٢ - ٤س - ٥ = ٠$$

بوضع ق'(س) = ٠ تكون ٩س^٢ - ٤س - ٥ = ٠، أي س = ١

ومن إشارة ق''(س) في الشكل المجاور

يكون منحنى ق(س) مقعراً للأعلى

في الفترة [-٢، ١]، ومقعراً للأسفل في الفترة [١، ٥]



* سيتم التعامل مع الفترات المفتوحة.

مثال ٢ :

الحل :

جد مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^2 + 1}{س}$ ، س ≠ ٠

ق(س) متصل على مجاله

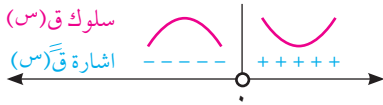
$$ق(س) = س + \frac{1}{س} \text{ ومنها } ق'(س) = 1 - \frac{1}{س^2}$$

$$ق''(س) = \frac{2}{س^3} \neq ٠$$

ومن إشارة ق''(س) في الشكل المجاور يكون:

منحنى ق(س) مقعراً للأسفل في الفترة $[-\infty, ٠)$ ،

ومقعراً للأعلى في الفترة $[٠, \infty)$ (لماذا؟)



تعريف:

تسمى النقطة (ج، ق) نقطة انعطاف للاقتران ق(س) إذا كان:

• ق(س) اقتراناً متصلاً عند س = ج

• يغيّر الاقتران اتجاه تقعر منحناه عند س = ج من الأعلى إلى الأسفل، أو العكس.



مثال ٣ :

الحل :

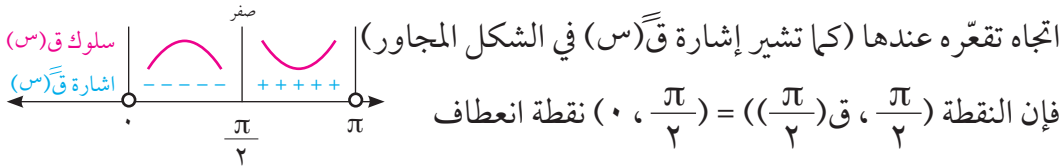
جد نقاط الانعطاف (إن وجدت) للاقتران ق(س) = $٣جاس جتاس$ ، س ∈ $[٠, \pi]$

$$ق(س) = ٣جاس^٢ + ٣جتاس^٣ = ٣جاس^٢(١ + جاس)$$

$$ق'(س) = ٦جاس = ٠$$

$$\text{نجعل } ق'(س) = ٠ \text{ فيكون } ٦جاس = ٠ \text{ ومنها } س = \frac{\pi}{٢}$$

وبما أن ق(س) متصل عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ، ويغيّر من



اتجاه تقعره عندها (كما تشير إشارة ق''(س) في الشكل المجاور)

فإن النقطة $(\frac{\pi}{٢}, \frac{\pi}{٢})$ ، ق $(\frac{\pi}{٢}) = (٠, \frac{\pi}{٢})$ نقطة انعطاف

بيّن أنه لا يوجد للاقتران ق(س) = $\sqrt{٢س - ٩}$ نقطة انعطاف في الفترة $[-٣, ٣]$

مثال ٤ :

الحل :

$$ق(س) = \sqrt{٢س - ٩} \text{ متصل في الفترة } [-٣, ٣]$$

$$ق'(س) = \frac{س^-}{\sqrt{٢س - ٩}}$$

$$ق''(س) = \frac{٩^-}{٣(٢س - ٩)\sqrt{٢س - ٩}} \neq ٠ \text{ ، } \forall س \in [-٣, ٣] \text{ ولكن } ق'(س) > ٠ \text{ صفر دائماً (لماذا؟)}$$

ومنها يكون منحنى ق(س) مقعراً للأسفل في $[-٣, ٣]$

وبما أن ق(س) لا يغير من اتجاه تقعره، فلا يوجد نقاط انعطاف للاقتران ق(س) في $[-٣, ٣]$

مثال ٥ :

إذا كان $Q(S) = S^4 - 2S^3$ ، $S \in \mathbb{R}$ ، فجد فترات التفرُّع للأعلى وللأسفل للاقتزان $Q(S)$ ، ثم جد نقط الانعطاف (إن وجدت).

الحل :

$Q(S)$ متصل لأنه كثير حدود.

$Q'(S) = 4S^3 - 6S^2$ ، $Q''(S) = 12S^2 - 12S$

بوضع $Q'(S) = 0$ ينتج أن $S = 1$ ، $S = 0$ ،

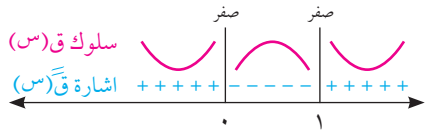
ومن إشارة $Q''(S)$ في الشكل المجاور يكون:

$Q(S)$ مقعراً للأعلى في الفترة $]-\infty, 0]$ ،

وكذلك في الفترة $]1, \infty]$

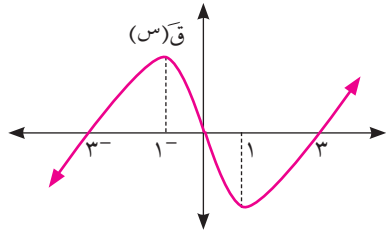
ويكون مقعراً للأسفل في الفترة $]0, 1]$

النقطتان $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ هما نقطتا انعطاف (لماذا؟)



مثال ٦ :

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتزان $Q(S)$ معتمداً عليه، جد كلاً مما يأتي:



١ فترات التزايد والتناقص للاقتزان $Q(S)$

٢ القيم القصوى المحلية للاقتزان $Q(S)$

٣ مجالات التفرُّع للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتزان $Q(S)$.

٤ قيم S التي يكون عندها نقاط الانعطاف (إن وجدت).

الحل :

نمثل إشارة $Q'(S)$ كما في الشكل المجاور:

١ يكون منحنى $Q(S)$

متزايداً في $]-3, 0]$ وفي $]3, \infty]$

ومتناقصاً في $]-\infty, -3]$ وفي $]0, 3]$

٢ $Q(-3)$ قيمة صغرى محلية

$Q(0)$ قيمة عظمى محلية

$Q(3)$ قيمة صغرى محلية.

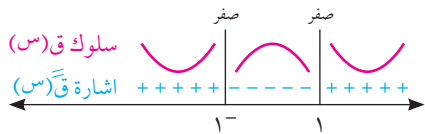
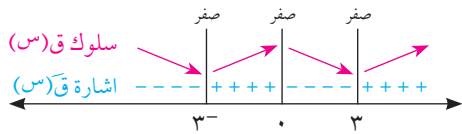
ونمثل إشارة $Q''(S)$ كما في الشكل المجاور:

٣ يكون منحنى $Q(S)$ مقعراً للأعلى

في $]-\infty, -1]$ وكذلك في $]1, \infty]$

ومقعراً للأسفل في $]1, 1]$

٤ نقاط الانعطاف تكون عند $S = -1$ ، $S = 1$ (لماذا؟)



ملاحظة:

إذا كان $q(s)$ كثير حدود وكانت $(s_1, q(s_1))$ نقطة انعطاف للاقتران $q(s)$ ، فإن $q'(s_1) = 0$.



اختبار المشتقة الثانية في تعيين القيم القصوى Second Derivative Test

نظرية:

- إذا كان $q(s)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق في فترة مفتوحة تحوي j وكان $q'(j) = 0$ فإن:
- 1 $q'(j)$ قيمة عظمى محلية، إذا كانت $q''(j) > 0$
 - 2 $q'(j)$ قيمة صغرى محلية، إذا كانت $q''(j) < 0$
 - 3 يفشل تطبيق الاختبار إذا كانت $q'(j) = 0$ ، أو $q''(j)$ غير موجودة.



جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران $q(s) = 3s^4 - 8s^3 + 6s^2$ ، باستخدام اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن).

مثال ٧:

$q(s)$ متصل وقابل للاشتقاق في h لأنه كثير حدود

الحل:

$$q'(s) = 12s^3 - 24s^2 + 12s$$

$$q'(s) = 0 \text{ ومنها } 12s^3 - 24s^2 + 12s = 0$$

$$12s^2(s - 2 + 1) = 12s^2(s - 1) = 0, \text{ ومنها إما } s = 0 \text{ أو } s = 1$$

$$q''(s) = 36s^2 - 48s + 12$$

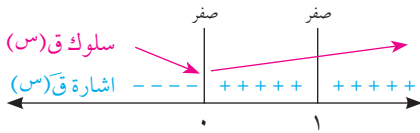
$$q''(0) = 12 < 0 \text{ إذن } q(0) = 0 \text{ قيمة صغرى محلية.}$$

بما أن $q'(1) = 0$ فلا نستطيع تحديد نوع القيمة القصوى $q(1)$ باستخدام اختبار المشتقة الثانية

لذا نلجأ إلى اختبار المشتقة الأولى.

من الشكل المجاور لا يوجد قيمة قصوى

محلية عند $s = 1$ (لماذا؟)



١ عيّن فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

أ ق(س) = (س^٢ - ٣س - ٤)(س + ٢) ، س ∈ ح

ب ق(س) = جاس - س ، س ∈ $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ج ق(س) = ٤س^٣ - ٣س^٤ + س ، س ∈]٤ ، ٠[

د ق(س) = (س - ٣) $\frac{٣}{٢}$ ، س < ٣

هـ ق(س) = جاس $\frac{س}{٢}$ ، س ∈]٠ ، π[

٢ حدد نقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية (إن وجدت):

أ ق(س) = س^٣ + س

ب ق(س) = جتاس ، س ∈]٠ ، ٢π[

ج ق(س) = $\sqrt[٣]{٥ - س}$

٣ جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = س^٣ + ٦س^٢ ، وحدد نوعها باستخدام اختبار المشتقة

الثانية (إن أمكن تطبيقها)، وفي حالة عدم إمكانية تطبيقها استخدم اختبار المشتقة الأولى:

٤ إذا كان للاقتران ق(س) = أس^٢ + س^٣ نقطة انعطاف عند س = ١⁻ ، فجد قيمة / قيم الثابت أ.

٥ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلًا في الفترة]-٣ ، ٢[ويحقق الشروط الآتية:

ق(٠) = ٠ ، ق(١) = ٠ ، ق(٢-) = ٠ ، ق(س) < ٠ عندما س < ٠ ، ق(س) > ٠ عندما س > ٠

اعتمد على هذه المعلومات للإجابة عن الأسئلة الآتية:

أ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س).

ب ما قيمة / قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها قيم قصوى؟ وما نوع كل منها؟

ج ما قيمة / قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها نقط انعطاف؟

تطبيقات عملية على القيم القصوى (Applications of Extrema)

مثال ١ :

عددان موجبان مجموعهما ٦٠، جد العددين إذا كان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

الحل :

نفرض أن العددين هما s ، v وأن حاصل ضربهما هو m فيكون

$$m = s \times v$$

$$\text{لكن } s + v = 60 \text{ ومنه } v = 60 - s$$

$$m = s \times v = s \times (60 - s) = 60s - s^2$$

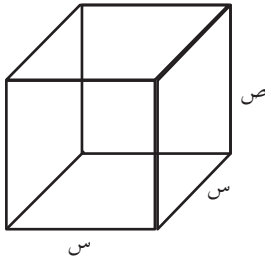
$$m = 60s - s^2$$

$$\text{نجعل } m = 0 \text{ ومنها } 60 - 2s = 0 \text{ أي } s = 30$$

$$\text{للتحقق } m = 2 - 30 = 0 \text{ ومنها } m = 30$$

(عند $s = 30$ يكون حاصل الضرب أكبر ما يمكن).

فيكون العددين هما ٣٠، ٣٠



مثال ٢ :

يراد صنع صندوق هدايا قاعدته مربعة الشكل من الكرتون

المقوى حجمه ٨ دسم^٣، جد أبعاده بحيث تكون تكلفة

تصنيعه أقل ما يمكن. (سعر المتر المربع ثابت)

الحل :

نفرض طول ضلع قاعدة الصندوق (س دسم) وارتفاعه (ص دسم)

$$\text{الحجم} = \text{الطول} \times \text{العرض} \times \text{الارتفاع}$$

$$8 = s^2 v \text{ ومنها } v = \frac{8}{s^2}$$

المساحة الكلية للصندوق = مساحة الجوانب الأربعة + مساحة القاعدتين

$$T = 4s \times v + \frac{8}{s} = 4s \times \frac{8}{s^2} + \frac{8}{s} = \frac{32}{s} + \frac{8}{s}$$

$$\text{ومنها } T = \frac{32}{s} + \frac{8}{s} = \frac{40}{s}$$

$$\text{وبالاشتقاق ينتج أن: } T' = -\frac{40}{s^2} = 0 \text{ وبوضع } T' = 0$$

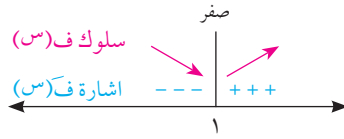
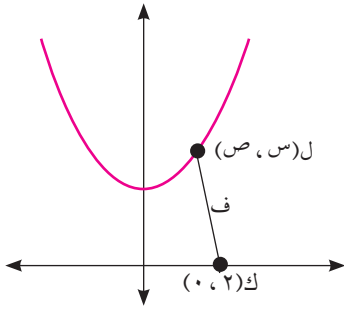
$$\frac{40}{s^2} = 0 \text{ أي أن } s = 2 \text{ دسم، ومنها } v = \frac{8}{2^2} = 2 \text{ دسم}$$

$$T'' = \frac{80}{s^3} = \frac{80}{8} = 10 > 0$$

ومنها $\left|_{s=2} \frac{64}{8} = 8 + 4 = 12 < 0 \right.$ (صغرى محلية وحيدة فهي صغرى مطلقة)
 التكلفة تكون أقل ما يمكن عندما تكون قاعدة الصندوق مربعة طول ضلعها 2 دسم، وارتفاع
 الصندوق 2 دسم.

مثال 3 :

جد أقصر مسافة بين النقطة ك (0، 2) ومنحنى العلاقة $s^2 - 2s = 8$



الحل :

نفرض النقطة ل (س، ص) على منحنى العلاقة
 ونفرض ف = المسافة بين ك، ل

$$\text{حسب قانون المسافة بين نقطتين } f = \sqrt{(س-0)^2 + (ص-2)^2}$$

$$\text{لكن } ص^2 = 8 + 2س، \text{ فتكون } f = \sqrt{س^2 - 2س + 4 + 8 + 4س} = \sqrt{س^2 + 2س + 12}$$

$$f' = \frac{2س + 2}{2\sqrt{س^2 + 2س + 12}}$$

بوضع $f' = 0$ ينتج أن $س = 1$ (لماذا؟)

ومن إشارة f' في الشكل المجاور

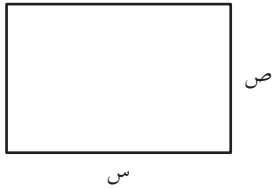
تكون المسافة أقصر ما يمكن عندما $س = 1$ ، $ص = 3 \pm$

ولأن للاقتران قيمة قصوى وحيدة فهي صغرى مطلقة

وتكون أقصر مسافة هي $f = \sqrt{10}$ وحدة.

مثال 4 :

أوجد أقل محيط ممكن لمستطيل مساحته 16 سم²



الحل :

نفرض طول المستطيل (س سم) وعرضه (ص سم)

$$\text{مساحة المستطيل } م = س \times ص = 16 \text{ ومنها } ص = \frac{16}{س}$$

$$\text{محيط المستطيل } ح = 2س + 2ص = 2س + 2\left(\frac{16}{س}\right) = 2س + \frac{32}{س}$$

$$ح' = 2 - \frac{32}{س^2} \text{ وعندما } ح' = 0 \text{ يكون } 2 = \frac{32}{س^2} \text{ ومنها } س = 4$$

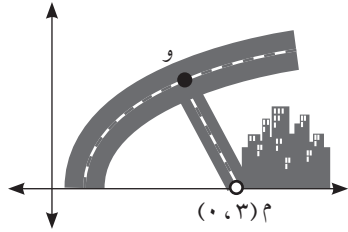
$$ح'' = \frac{64}{س^3} \text{ ومنها } ح''(4) = 1 \text{ (موجب)} \leftarrow \text{المحيط أقل ما يمكن}$$

فيكون أقل محيط للمستطيل هو 16 سم

١ يريد رجل عمل حديقة مستطيلة الشكل في أرضه، وذلك بإحاطتها بسياج، فإذا كان لديه ٨٠ متراً من الأسلاك، فما مساحة أكبر حديقة يمكن للرجل إحاطتها؟

٢ مقلمة على شكل أسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها ١٩٢ سم^٣ فإذا علمت أن سعر كل ١ سم^٢ من البلاستيك المستخدم لصنع القاعدة، يعادل ثلاثة أمثال سعر ١ سم^٢ من البلاستيك المستخدم في صنع الجوانب، جد أبعاد المقلمة ذات الأقل تكلفة.

٣ طريق منحني معادلته في المستوى الديكارتي هي



ص = ق (س) = $\sqrt{2s - 1}$ ، النقطة م (٠، ٣) تمثل موقع مستشفى، يراد شق شارع فرعي مستقيم من النقطة (و) إلى موقع المستشفى (م)، عيّن إحداثيات النقطة (و) ليكون طول الشارع (وم) أقل ما يمكن. (انظر الشكل المجاور).

٤ جسم يسير في خط مستقيم بحيث إن بعده ف بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة

$$f = a \text{ جتا } \frac{\pi}{4} n + b \text{ جا } \frac{\pi}{4} n \text{ فإذا كانت السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية } [2, 0]$$

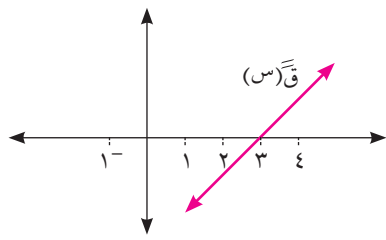
هي ١٠ م/ث، وكانت سرعة الجسم أقل ما يمكن عند ن = ١ ث. احسب الثابتين أ، ب.

٥ جد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢ سم، ونصف قطر قاعدته ٤ سم.

ورقة عمل (١)

١ إذا كان $q(s)$ ، هـ (s) كثيري حدود معرفين في الفترة $[٠, ٤]$ ، بحيث إن منحنى $q(s)$ متناقص في مجاله، ويقع في الربع الرابع، ومنحنى هـ (s) متزايد في مجاله، ويقع في الربع الأول، أثبت أن منحنى الاقتران $q(s) \times h(s)$ متناقص في الفترة $[٠, ٤]$.

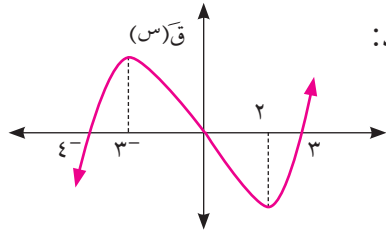
٢ إذا كان $q(s) = s^3 + s^2 + 9s + ١$ ، أ، ب \exists ح اقتران له قيمة عظمى محلية عند $s = ١$ ، وقيمة صغرى محلية عند $s = ٣$ ما قيمة كل من الثابتين أ ، ب؟



٣ الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $q(s)$ إذا علمت أن $q(٠) = (٦) = ٠$ ، جد كلاً مما يأتي:

- أ فترات التقعر، ونقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران $q(s)$
- ب القيم القصوى المحلية للاقتران $q(s)$
- ج فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران $q(s)$

٤ أ ب ج د مستطيل عرضه أ ب = ٨ سم وطوله ب ج = ١٠ سم، م نقطة على الضلع أ ب بحيث أ م = س سم، ن نقطة على الضلع ب ج بحيث ن ج = $\frac{٣}{٢}$ س سم، جد قيمة س بحيث تكون مساحة المثلث م ن ج أكبر ما يمكن.



٥ معتمداً على الشكل المجاور، الذي يمثل منحنى الاقتران $q(s)$ جد:

- أ فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران $q(s)$.
- ب الإحداثيات السينية لنقط الانعطاف.

٦ سلك طوله ١٨ سم، صنع منه مثلثان كل منهما متساوي الأضلاع، ما طول ضلع كل من المثلثين ليكون مجموع مساحتهما أصغر ما يمكن؟



تعريف:

المصفوفة هي تنظيم مستطيل الشكل لمجموعة من الأعداد، على هيئة صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين [] ويرمز لها بأحد الأحرف أ، ب، وتسمى الأعداد داخل المصفوفة مدخلات.

تحدد رتبة المصفوفة بعدد الصفوف وعدد الأعمدة فيها، على النحو $m \times n$ حيث m يمثل عدد صفوفها، n يمثل عدد أعمدتها (وتقرأ m في n).
عدد مدخلات المصفوفة = عدد صفوفها \times عدد أعمدتها.

الصورة العامة للمصفوفة من الرتبة $m \times n$ تكون على النحو:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = a_{m \times n}$$

وتحدد أي مدخلة فيها بحسب الصف والعمود الواقعة فيها، فالمدخلة التي تقع في تقاطع الصف i مع العمود j هي المدخلة a_{ij} .

مثال ١: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

١) جد رتبة كل من المصفوفتين أ، ب

٢) جد a_{21} ، b_{12}

١) المصفوفة أ تتكون من ٣ صفوف وعمودين فهي من الرتبة 3×2

والمصفوفة ب من الرتبة 2×3

٢) قيمة المدخلة $a_{21} = 1$ ، $b_{12} = 5$

* أول من قدم المصفوفات بصورتها الحالية هو العالم الرياضي A. A. Cayley عام ١٨٥٧ م.

أنواع خاصة من المصفوفات:

١ المصفوفة المربعة: هي المصفوفة التي يكون عدد صفوفها = عدد أعمدها = ن، وتسمى عندئذ مصفوفة مربعة من الرتبة ن.

٢ مصفوفة الوحدة: ويرمز لها بالرمز (م) وهي مصفوفة مربعة، وتكون مدخلاتها على النحو الآتي:

$$\left. \begin{array}{l} \text{م} = \begin{cases} 1 & , & \text{ي} = \text{هـ} \\ 0 & , & \text{ي} \neq \text{هـ} \end{cases} \\ \text{فمثلاً} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{م}_2, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{م}_3 \text{ وهكذا ...} \end{array} \right\}$$

٣ المصفوفة الصفرية (و): هي المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار، مثل $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{م}_{3 \times 3}$

٤ مصفوفة الصف: هي المصفوفة المكونة من صف واحد مثل ص = $[\quad 2 \quad -1 \quad 4 \quad]$

٥ مصفوفة العمود: هي المصفوفة المكونة من عمود واحد مثل ج = $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

مثال ٢: لديك المصفوفات أ = $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -8 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، ج = $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

١ ما نوع المصفوفة ج؟

٢ هل ب مصفوفة وحدة؟

٣ ما مجموع مدخلات العمود الثاني من المصفوفة أ؟

١ المصفوفة ج هي مصفوفة عمود.

٢ المصفوفة ب ليست مصفوفة وحدة. (لماذا؟)

٣ مجموع مدخلات العمود الثاني من المصفوفة أ يساوي ٢

الحل :

نشاط: كوّنت ياسمين المصفوفة ك من الرتبة 3×3 حسب الشروط الآتية

$$\left. \begin{array}{l} \text{ك} = \begin{cases} \text{ي} + \text{هـ} & , & \text{ي} > \text{هـ} \\ \text{ي} - \text{هـ} & , & \text{ي} < \text{هـ} \\ \frac{\text{ي}}{\text{ي} + \text{هـ}} & , & \text{ي} = \text{هـ} \end{cases} \end{array} \right\}$$

فكانت قيمة المدخلة ك_{١٢} = ١ ، قيمة المدخلة ك_{٢١} = ، $\sum_{ي=١}^٣ ك_{ي٣} = \dots\dots$
مدخلات القطر الرئيسي هي

تساوي مصفوفتين

تعريف:



تساوي المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وكانت مدخلاتها المتناظرة متساوية.
وبالرموز نقول أن أ = ب إذا وفقط إذا كان أ_{ي هـ} = ب_{ي هـ} لجميع قيم ي ، هـ .

مثال ٣: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ج = $\begin{bmatrix} ٣ & س \\ \sqrt{٤} & ص \end{bmatrix}$

١ هل أ = ب؟ ولماذا؟

٢ جد قيم س، ص، ع التي تجعل أ = ج

١ أ ≠ ب لأن أ_{١١} ≠ ب_{١١}

٢ بما أن أ = ج ، فتكون مدخلاتها المتناظرة متساوية، ومنها س = ٢ ، ص = ٤

أي أن ص = ٢ ± ٤ وكذلك $\sqrt{٤} = ٥$ ومنها ع = ٢٥ .

تمارين ٢ - ٥

١ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤- & ٥ & ٢ \\ س & ٢ & ٦ \\ ٧ & س- & ١ \\ ٧ & ٢٠ & ٣ \end{bmatrix}$ فجد:

أ رتبة المصفوفة أ ب قيمة (أ_{٢١} + أ_{١٢}) ج قيمة س بحيث إن: (أ_{٢٣})^٣ = ٢٧

٢ إذا كانت $\begin{bmatrix} ١٠ & ٢ \\ ١-س & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١+٢س & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ فجد قيمة / قيم س.

٦ - ٢ العمليات على المصفوفات (Operations on Matrices)

أولاً: جمع المصفوفات:

تعريف:

إذا كانت أ، ب مصفوفتين من الرتبة م × ن، فإن ج = أ + ب هي مصفوفة من الرتبة م × ن مدخلاتها ناتجة من جمع المدخلات المتناظرة في كل من أ، ب أي أن: ج_{ي هـ} = أ_{ي هـ} + ب_{ي هـ}



$$\text{مثال ١: إذا كانت } س = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}, \text{ ص} = \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}, \text{ ع} = \begin{bmatrix} ٥ & ٧ & ٣ \\ ٦ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

جد ناتج ما يأتي (إن أمكن) ١ س + ص ٢ ص + س ٣ ص + ع

$$\text{١ س + ص} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧+٣ & ٥+٢ \\ ٤+٤ & ٣+٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٧ \\ ٨ & ٨ \end{bmatrix}$$

$$\text{٢ ص + س} = \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧+٣ & ٥+٢ \\ ٤+٤ & ٣+٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٧ \\ ٨ & ٨ \end{bmatrix} \text{ (ماذا تلاحظ؟)}$$

٣ ص + ع غير معرفة؛ لأن رتبة ص ≠ رتبة ع.

ثانياً: ضرب المصفوفة بعدد حقيقي

تعريف:

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن، وكان ك عدداً حقيقياً، فإن ك أ = ج، حيث ج مصفوفة من الرتبة م × ن، وتكون مدخلاتها على النحو: ج_{ي هـ} = ك أ_{ي هـ} لجميع قيم ي، هـ.



$$\text{مثال ٢: إذا كانت } أ = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ ٥ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}, \text{ فجد } ١ أ٢, ٢ أ- ٣ أ + (-أ)$$

$$\text{١ } أ٢ = \begin{bmatrix} ١ \times ٢ & ٤ \times ٢ & ٣ \times ٢ \\ ٥ \times ٢ & ٠ \times ٢ & ٢ \times ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٨ & ٦ \\ ١٠ & ٠ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1- & 4- & 3- \\ 5- & 0 & 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3- \\ 5 & 0 & 2- \end{bmatrix} 1- = أ(1-) = أ- \quad ٢$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1- & 4- & 3- \\ 5- & 0 & 2- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3- \\ 5 & 0 & 2- \end{bmatrix} = (أ-) + أ \quad ٣$$

(فسّر الإجابة).

مثال ٣: إذا كانت $\begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = أ$ ، $\begin{bmatrix} 3 & 4- \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = ب$ ، فجد $أ٣ + ٢ب$

الحل: $\begin{bmatrix} 3 & 4- \\ 7 & 3 \end{bmatrix} ٢ + \begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} ٣ = أ٣ + ٢ب$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2- \\ 17 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8- \\ 14 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3- & 6 \\ 3 & 15 \end{bmatrix} =$$

ثالثاً: طرح المصفوفات

تعريف:

إذا كانت $أ$ ، $ب$ مصفوفتين من نفس الرتبة $م \times ن$ ، فإن $أ - ب = أ + (-ب)$



مثال ٤: إذا كانت $\begin{bmatrix} 2- & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = أ$ ، $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = ب$ ، فجد المصفوفة $أ - ب$

الحل: $أ - ب = أ + (-ب) = \begin{bmatrix} 2- & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1- \end{bmatrix}$

أو: $أ - ب = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2- & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2- - 3 & 3 - 4 \\ 2 - 5 & 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1- \end{bmatrix}$

لاحظ أن مدخلات $أ - ب$ - أ تنتج من طرح مدخلات المصفوفة $أ$ من المدخلات المناظرة لها في المصفوفة $ب$

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي:

إذا كانت (أ، ب، ج، و) مصفوفات من نفس الرتبة، ك \exists ح فإن:

- ١ أ + ب = ب + أ (الخاصية التبديلية)
- ٢ (أ + ب) + ج = أ + (ب + ج) (الخاصية التجميعية)
- ٣ أ + و = و + أ = أ (المصفوفة الصفرية المحايدة لعملية جمع المصفوفات)
- ٤ أ + (أ-) = (أ-) + أ = و (النظير الجمعي)
- ٥ ك (أ + ب) = ك أ + ك ب (توزيع الضرب بعدد حقيقي على جمع المصفوفات)

مثال ٥: حل المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + س = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

الحل: بإضافة النظير الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ إلى طرفي المعادلة تصبح:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + س \right)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + س$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + س$$

تدريبات:

١ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ ، فجد ب + أ، أ - ب

ب إذا كانت ج = $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ، د = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ، فبين أن: ج + د = ٩م

٢ حل المعادلة المصفوفية: $٢ - \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = س + س = ٣م$

٣ إذا كانت ج = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ فجد المصفوفة أ بحيث: أ + ج = و

رابعًا: ضرب المصفوفات (Matrix Multiplication)



تعريف:

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن، ب مصفوفة من الرتبة ن × ل، فإن حاصل الضرب أ . ب = ج، حيث ج مصفوفة من الرتبة م × ل، وتكون مدخلات المصفوفة ج على النحو ج_{يه} = أ_{ي1} × ب_{1هـ} + أ_{ي2} × ب_{2هـ} + ... + أ_{ين} × ب_{نهـ}

$$\text{لتكن أ} = \begin{bmatrix} 2 & 1- & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \text{ ب} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3- \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ ج} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال ٦:

فأي العمليات الآتية تكون معرفة: ١ أ . ج ٢ أ . ب ٣ ب . ج

الحل:

- ١ أ من الرتبة ٣ × ٢، ج من الرتبة ٢ × ٢، فإن أ . ج غير معرفة. (لماذا؟)
- ٢ أ . ب معرفة لأن عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب.
- ٣ ب . ج معرفة أيضاً. (لماذا؟)

$$\text{إذا كانت أ} = \begin{bmatrix} 5 & 3- \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ج} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2- & 9 & 5- \end{bmatrix} \text{ فجد (إن أمكن):}$$

مثال ٧:

١ أ . ج ٢ ج . أ

١ بما أن رتبة أ هي ٢ × ٢، رتبة ج هي ٣ × ٢

الحل:

$$\text{فإنه يمكن إيجاد ناتج الضرب على النحو أ . ج} = \begin{bmatrix} 5 & 3- \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2- & 9 & 5- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2- \times 5 + 2 \times 3- & 9 \times 5 + 1 \times 3- & 5- \times 5 + 4 \times 3- \\ 2- \times 6 + 2 \times 1 & 9 \times 6 + 1 \times 1 & 5- \times 6 + 4 \times 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 16- & 42 & 37- \\ 10- & 55 & 26- \end{bmatrix} = \text{ل}$$

لاحظ أن المدخلة ل_{١١} = ٤٢، ناتجة من ضرب مدخلات الصف الأول من أ مع ما يناظرها من مدخلات العمود الثاني من ج.

٢ لا يمكن إيجاد حاصل الضرب ج . أ (لماذا؟)

نشاط: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ ، فجد (إن أمكن) كلا من: أ. ب ، ب. أ

$$1 \text{ أ. ب} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 41 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$2 \text{ ب. أ} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \dots \dots \dots \text{ ماذا تستنتج؟}$$

مثال ٨: لتكن A مصفوفة من الرتبة $2 \times n$ ، B مصفوفة من الرتبة $5 \times k$ فما قيم كل من n ، k التي تجعل $A \cdot B$ ، $B \cdot A$ معرفتين؟

الحل: حتى يكون $A \cdot B$ معرفاً فإن قيمة $n = 5$ ، وليكون $B \cdot A$ معرفاً فإن قيمة $k = 2$ (لماذا؟)

مثال ٩: جد ناتج $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right)$

الحل: $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 11 \end{bmatrix}$ ، ما رتبة المصفوفة الناتجة؟

خصائص عملية الضرب على المصفوفات:

إذا كانت A ، B ، C مصفوفات حيث أن عمليتي الضرب والجمع معرفتان، M المصفوفة المحايدة، $k \in \mathbb{R}$ فإن:

- ١ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ الخاصية التجميعية.
- ٢ $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ توزيع الضرب على الجمع من اليمين .
- ٣ $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$ توزيع الضرب على الجمع من اليسار .
- ٤ $A \cdot M = A$ ، $M \cdot A = A$ (العنصر المحايد لعملية ضرب المصفوفات).
- ٥ $k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)$

تمارين ٢-٦

١ إذا كانت أ، ب، ج مصفوفات بحيث أن أ . ب = ج فما رتبة ب في كل ممالي:

أ ٥×٢ ، ج ٤×٢ ب ٣×٣ ، ج ٥×٣

٢ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ & ٥ \\ ٧ & ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ج = $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ فجد ما يأتي:

أ . أ . ب ب . ج . ب ج . أ

٣ جد قيم س، ص بحيث $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٤ & ٤ \\ ٨ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦٤ & ٢٠ \\ ٣٤ & ٥ \end{bmatrix}$

٤ إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = ص$ ، $\begin{bmatrix} ٨ & ٧ \end{bmatrix}$ فبين أن: س = ٥ ص

٥ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فهل يمكن إيجاد قيمة/ قيم س بحيث إن: أ = ب؟

للمحددات كثير من التطبيقات والاستخدامات في مجالات عدة، في الجبر والهندسة، فالمحدد يمثل اقتراناً يربط كل مصفوفة مربعة بعددٍ حقيقي، ويفاد منه في حل أنظمة المعادلات، وفي إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة، وسوف تقتصر دراستنا في هذا الدرس على إيجاد محدد المصفوفات المربعة من الرتبة الأولى، والثانية، والثالثة فقط.

تعريف:



إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإننا نرمز لمحددها بالرمز $|A|$:

١ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$ فإن $|A| = a_{11}$

٢ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ فإن $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$

٣ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

فإن $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

مثال ١: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، فجد: ١ $|A|$ ، ٢ $|A+B|$

١ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 1 \times 2 = 13$

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$

٢ $A+B = \begin{bmatrix} 3+2 & 2+1 \\ 1+3 & 5+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ ، $|A+B| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 5 \times 9 - 4 \times 3 = 27$ (ماذا تلاحظ؟)

نظرية:



إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة، فإنه يمكن إيجاد $|A|$ بدلالة مدخلات أي صف، أو أي عمود وذلك بضربها بالمحدد الناتج من تصور شطب الصف ي والعمود هـ، وإعطاء إشارة لحاصل الضرب وفقاً للقاعدة $(-1)^{i+h}$

$$\text{جد باستخدام التعريف} \begin{vmatrix} 1 & 3- & 2 \\ 2 & 5- & 4 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

مثال ٢ :

$$13 = \begin{vmatrix} 5- & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3- & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3- & 2 \\ 2 & 5- & 4 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل :

$$20 = \begin{vmatrix} 3- & 2 & 1 \\ 1 & \text{س} & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

مثال ٣ :

الحل : نجد قيمة المحدد بدلالة مدخلات الصف الثالث، حيث يحوي أصفاراً.

$$8 = \text{أي أن} \begin{vmatrix} 3- & 2 & 1 \\ 1 & \text{س} & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \text{س} & 2 \end{vmatrix} (1-)^3 = 5(1-)^3 \text{ ومنها } 20 = (5- \text{س}) \text{ أي س} = 8$$

فكر وناقش:



ما قيمة محدد المصفوفة المربعة التي تحتوي على صف، أو عمود، كل مدخلاته أصفاراً؟

$$\text{نشاط: إذا كانت المصفوفة أ} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ فإن:}$$

١ قيمة |أ| =

$$2 \quad |2| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 4 \times 6 - 8 \times 2 = 8 = |4| \quad 3 \quad |3-| = \dots\dots\dots$$

$$3 \quad |3-| = \dots\dots\dots$$

$$4 \quad |ك أ| = \dots\dots\dots$$

قاعدة (١):



إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن، فإن |ك أ| = |ك أ|، حيث ك ∈ ح

مثال ٤ : إذا كانت أ مصفوفة مربعة، وكان |أ| = ٥، |٢ أ| = ٤٠، فما رتبة المصفوفة أ؟

الحل :

نفرض أن أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن، وبما أن |٢ أ| = ٤٠ فإن |٢ أ| = ٤٠ = ٢^ن |أ| = ٤٠ = ٢^ن × ٥ = ٤٠ أي أن ٢^ن = ٨ ومنها ينتج أن: ن = ٣

أي أن أ مصفوفة مربعة من الرتبة ٣

قاعدة (٢):



إذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعيتين من الرتبة ن فإن $|أ. ب| = |أ| \times |ب|$

مثال ٥: إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٥- & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٤- & ١ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$ ، فجد $|أ. ب|$

الحل: $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢- \\ ٥- & ٤ \end{vmatrix} = ١٢ - ١٠ = ٢-$

وكذلك $|ب| = \begin{vmatrix} ٤- & ١ \\ ٢ & ٣- \end{vmatrix} = ١٢ - ٢ = ١٠-$

ومنه $|أ. ب| = |أ| \times |ب| = ٢٠ = ١٠- \times ٢-$

هل يمكنك إيجادها بطريقة أخرى؟

تمارين ٢ - ٧

١ جد قيمة كل من المحددات الآتية:

أ $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٤- \\ ١ & ٥ & ٦ \\ ٢ & ٣ & ٤- \end{vmatrix}$ ب $\begin{vmatrix} ٤- & ٢ \\ ٨ & ٤ \end{vmatrix}$ ج $|٣٥|$

٢ حل المعادلة الآتية: $\begin{vmatrix} ٣ & ١- & ٢ \\ ٥ & س & ٤ \\ ٣ & ٦ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١- & س \\ س & ١ \end{vmatrix}$

٣ إذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعيتين من الرتبة الثانية بحيث إن $|أ٣| = ٥٤$ ، $|أ. ب| = ١٢-$ فما قيمة $|أ٢| + |ب٥|$ ؟

٨ - ٢ النظر الضربي للمصفوفة المربعة (Inverse of a Square Matrix)

عرضنا في درس سابق المصفوفة المحايدة (م) في عملية ضرب المصفوفات، وتعرّفنا إلى خاصية مهمة من خصائص ضرب المصفوفات، وهي $م = م \cdot أ = أ \cdot م$ حيث أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن.

تعريف:

تسمى المصفوفة المربعة أ مصفوفة غير منفردة إذا وجدت مصفوفة مربعة ب من نفس الرتبة بحيث $أ \cdot ب = ب \cdot أ = م$ ، وتسمى المصفوفة ب نظيراً ضربياً للمصفوفة أ، ونرمز لها بالرمز $أ^{-١}$ ونكتب (ب = $أ^{-١}$) ويكون $أ \cdot أ^{-١} = أ^{-١} \cdot أ = م$



مثال ١: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ فبيّن فيما إذا كانت $ب = أ^{-١}$

الحل: $أ \cdot ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = م$

$ب \cdot أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = م$

ومنها $ب = أ^{-١}$ (لماذا؟)

تعريف:

المصفوفة المنفردة هي المصفوفة المربعة التي لا يوجد لها نظير ضربى.



نظرية:

المصفوفة أ منفردة إذا وفقط إذا كان $|أ| \neq ٠$



مثال ٢: أي المصفوفات الآتية منفردة وأيها غير منفردة؟ $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٨ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ & ٦ \\ ١ & ٣ & ٥ \end{bmatrix}$

الحل: $|أ| = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٨ & ٤ \end{vmatrix} = ٣٢ \neq ٠$ صفر، ومنها تكون المصفوفة أ غير منفردة.

مثال ٣: جد قيمة س التي تجعل المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ & ٦ \\ ١ & ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ أي أن المصفوفة ب منفردة.

جد قيمة س التي تجعل المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ (١+س) & ٣ \end{bmatrix}$ منفردة.

$$24 - (1 + s)2 = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ (1+s) & 3 \end{vmatrix} = |A| \quad \text{الحل :}$$

وبما أن مصفوفة منفردة فيكون $|A| \neq 0$

$$24 - (1 + s)2 = 0$$

$$24 - 2 - 2s = 0 \quad \text{ومن هنا } s = 11$$

خصائص النظير الضربي:

إذا كانت A ، B مصفوفتين مربعيتين، وغير منفردتين، ومن نفس الرتبة، وكان K عدداً حقيقياً $\neq 0$ ، فإن:

$$1 \quad (A^{-1})^{-1} = A \quad 2 \quad (K \cdot A)^{-1} = \frac{1}{K} \cdot A^{-1} \quad 3 \quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة:

سوف نتعرف على طرق إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة، وستقتصر دراستنا على النظير الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية فقط.

$$\text{مثال ٤ :} \quad \text{جد النظير الضربي للمصفوفة } A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{إن وجد}).$$

$$\text{الحل :} \quad \text{نفرض أن: } A^{-1} = \begin{bmatrix} s & ص \\ ل & ع \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \text{أي} \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & ص \\ ل & ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ومن هنا} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3s+5ل & 3ص+5ع \\ 4s+6ل & 4ص+6ع \end{bmatrix}$$

$$\text{كما أن } A^{-1} \cdot A = I \quad \text{أي} \quad \begin{bmatrix} s & ص \\ ل & ع \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3s+4ل & 5ص+6ع \\ 3ص+4ع & 5ع+6ص \end{bmatrix}$$

وبحل المعادلات الناتجة من تساوي المصفوفتين في الحالتين السابقتين:

$$\text{ينتج أن: } s = 2, \quad ع = 3, \quad ص = \frac{3-}{2}, \quad ل = \frac{5}{2}$$

$$\text{أي أن: } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3-}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & 3- \end{bmatrix} \quad (\text{تحقق من ذلك})$$



تعميم:

$$\begin{bmatrix} ٢١^أ- & ٢٢^أ \\ ١١^أ & ١٢^أ- \end{bmatrix} \frac{١}{|أ|} = ١^أ- \text{ مصفوفة غير منفردة فإن } ١^أ- =$$

أي أن: $١^أ-$ تنتج من ضرب المصفوفة أ بمقلوب محدها بعد تبديل أماكن مدخلات القطر الرئيسي وتغيير إشارة مدخلات القطر الآخر من المصفوفة أ.

مثال ٥: إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$ ، فجد $س^{-١}$ (إن أمكن).

الحل: $|س| = ٦ - ٢ = ٤ \neq ٠$
المصفوفة $س$ لها نظير ضربي، وتكون $س^{-١} = \frac{١}{٤} \begin{bmatrix} ٣- & ١- \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٤} & \frac{١}{٨} \\ \frac{١-}{٤} & \frac{٣}{٨} \end{bmatrix}$

تمارين ٢ - ٨

١ بين أي من المصفوفات الآتية لها نظير ضربي.

$$\begin{bmatrix} ٣ & ١- & ٢ \\ ٩ & ٣- & ٦ \\ ١- & ٨ & ٢ \end{bmatrix} = ج \quad \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix} = ب \quad \begin{bmatrix} ٨- & ٤ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix} = أ$$

٢ ما قيم $ك$ التي تجعل كلا من المصفوفات الآتية منفردة؟ أ $\begin{bmatrix} ك & ك \\ ٢ك & ٤ \end{bmatrix}$ = ب $\begin{bmatrix} ٤ & ك \\ ك & ١ \end{bmatrix}$

٣ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فجد: أ $١^أ-$ (إن أمكن) ب $١^أ-$

٤ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٥ & س \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكان $|أ^{-١}| = \frac{١}{٥}$ ، فما قيمة $س$ ؟

٥ إذا علمت أن $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، وكان أ. ج = ب، فجد ج $١-$

تعرفنا في صفوف سابقة على حل أنظمة المعادلات الخطية (عدد المعادلات = عدد المتغيرات، ولها حل وحيد) بطريقتي الحذف والتعويض، وفي هذا الدرس سنبرز أهمية المصفوفات والمحددات في حل هذه الأنظمة، وستناول طريقتين، هما:

١ طريقة النظير الضربي*

٢ طريقة كريمر*

أولاً: طريقة النظير الضربي

يمكننا تمثيل نظام من المعادلات الخطية على شكل معادلة مصفوفية، باستخدام ثلاث مصفوفات، هي: مصفوفة المعاملات أ، ومصفوفة المتغيرات ك، ومصفوفة الثوابت ج.

إذا كان لدينا نظام المعادلات الخطية الآتي:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \text{أ}، \text{ فإن مصفوفة المعاملات هي: } \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} = \text{ج}، \text{ ومصفوفة الثوابت هي: } \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ويمثل النظام السابق من المعادلات الخطية بمعادلة مصفوفية كما يأتي:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

وهي على الصورة أ. ك = ج وبالتالي:

تكون ك = أ^{-١} . ج بشرط أن أ مصفوفة غير منفردة (لماذا؟)

* يكتفى بحل نظام مكون من معادلتين خطيتين فقط عند الحل بطريقتي النظير الضربي وكريمر.

حل النظام : $2س + ص = 1^-$ ، $4س + ص = 1$ ، باستخدام طريقة النظير الضربي.

مثال ١ :

نكتب المعادلة المصفوفية على النحو: $\begin{bmatrix} 1^- \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

الحل :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1^-}{2} \\ 1^- & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^- & 1 \\ 2 & 4^- \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2^-} = 1^- \text{ ومنها } 2^- = 4 - 2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \text{ أ}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ 1^- + 2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^- \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1^-}{2} \\ 1^- & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

أي أن: $س = 1$ ، $ص = 3^-$

فكر وناقش:



ماذا يحدث للإجابة إذا تم تغيير ترتيب المعادلتين هكذا:

$$4س + ص = 1 \text{ ، } 2س + ص = 1^-$$

ثانياً: طريقة كريمر

سبق وأن مثلنا أي نظام من المعادلات الخطية بمعادلة مصفوفية على النحو أ . ك = جـ حيث إن مصفوفة المعاملات أ غير منفردة، ك مصفوفة المتغيرات، جـ مصفوفة الثوابت، فإذا كان النظام

$$\begin{bmatrix} |أص| \\ |أ| \end{bmatrix} = ص \text{ ، } \begin{bmatrix} |أس| \\ |أ| \end{bmatrix} = س$$

يتضمن المتغيرين س ، ص ، فإننا نجدهما على النحو: $س = \frac{|أس|}{|أ|}$ ، $ص = \frac{|أص|}{|أ|}$

حيث إن: أس المصفوفة الناتجة من استبدال عمود معاملات س بعمود الثوابت.
أص المصفوفة الناتجة من استبدال عمود معاملات ص بعمود الثوابت.

باستخدام طريقة كريمر حل النظام الآتي: $3س + 5ص = 1$ ، $2س + 3ص = 0$

مثال ٢ :

نكون المصفوفات: $أ = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، $أس = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، $أص = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ فيكون:

الحل :

$$1^- = 10 - 9 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \text{ أ}^- ، 1^- = 10 - 9 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \text{ أس}^- ، 3 = 0 - 3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \text{ أص}^- ، 2^- = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \text{ أص}^-$$

$$\therefore س = \frac{3}{1^-} = \frac{|أس|}{|أ|} = 3^- ، ص = \frac{2^-}{1^-} = \frac{|أص|}{|أ|} = 2^-$$

قامت حنين بحل نظام مكون من معادلتين خطيتين بالمتغيرين س ، ص ، فوجدت أن المصفوفة

$$\text{أس} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ، \text{والمصفوفة أص} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ فإن:}$$

مصفوفة المعاملات للنظام الذي حلته حنين هي:
 س = ، ص =

تمارين ٢ - ٩

١ حل كلاً من الأنظمة الآتية باستخدام طريقة النظير الضربي:

$$\text{أ} \quad \text{س} - \text{ص} = 3 \quad \text{ب} \quad \text{س} + \text{ص} = 2$$

$$\text{س} + \text{ص} = 2 \quad \text{س} + \text{ص} = 11$$

٢ حل أنظمة المعادلات الآتية باستخدام طريقة كريمة:

$$\text{أ} \quad \text{س} - \text{ص} = 5 \quad \text{ب} \quad \text{س} + \text{ص} = 3$$

$$\text{س} + 2\text{ص} = 2 \quad \text{س} + \text{ص} = 2$$

٣ عند حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بالمتغيرين س ، ص بطريقة كريمة، وجد أن:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ، \text{أس} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} ، \text{فجد قيمة س ، ص}$$

١ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & s \\ s & 2 \end{bmatrix}$ ، وكان $|A| = 125$ ، فما قيمة/ قيم s ؟

٢ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3- \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1- & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ، جـ

جد المصفوفة D بحيث أن: $A + D = B$.

٣ جد قيم s ، v الحقيقية التي تحقق المعادلة: $s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 3- \end{bmatrix}$

٤ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2- \\ 5 & 3- & 6 \end{bmatrix}$ ، فجد المصفوفة B من الرتبة 2×3

بحيث إن $A \cdot B = B \cdot A$ لجميع قيم s, v .

٥ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3- & s \\ s & 1 \end{bmatrix}$ ، وكان $|A| = |A^{-1}|$ ، فما قيمة/ قيم المقدار (s, v) ؟

٦ حل المعادلات المصفوفية الآتية:

أ $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (باستخدام النظر الضربي)

ب $\begin{bmatrix} 11 & 3- & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1- & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2- & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & v \end{bmatrix}$

٧ عند حل المعادلتين $s - v = 5$ ، $s + v = 3$ ، n ، k عدنان حقيقيان لا يساويان صفراً.

باستخدام طريقة كرامر، إذا كانت $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ تمثل محدد A

جد قيمة: أ n ، ك k ب s, v

١ اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كان $ق(س) = \left. \begin{matrix} س^2 - س ، ٠ \leq س \leq ١ \\ س - ١ ، ١ < س \leq ٣ \end{matrix} \right\}$ ، فما مجموعة قيم $س$ التي يكون عندها

للاقتران $ق(س)$ نقطة حرجة في الفترة $[٣، ٠]$ ؟

أ) $\{٣، ١، ٠\}$ ب) $\{٣، ٠\}$ ج) $\{٣، \frac{1}{٢}، ٠\}$ د) $\{٣، ١، \frac{1}{٢}، ٠\}$

٢ إذا كان $ق(س) = (س^2 - ١)^3 (س - ٢)^4$ ، فما الفترة التي يكون فيها $ق(س)$ متناقصاً؟

أ) $[-\infty، -١]$ ب) $[-١، ١]$ ج) $[٢، ١]$ د) $[٢، \infty]$

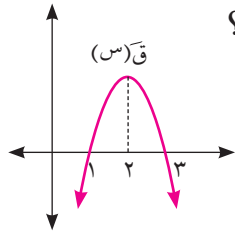
٣ إذا كان $ق(س)$ اقتراناً متصلاً على $[٣، ١]$ وكان $ق(س) > ٠$ لجميع قيم $س \in [٣، ١]$ ، $ق(س)$

له ثلاث نقاط حرجة فقط في $[٣، ١]$ وكان $ق(٢) = ٠$ ، فما العبارة الصحيحة مما يأتي؟

أ) $ق(\frac{٥}{٢}) < ٠$ ب) $ق(\frac{٥}{٢}) < ق(٢)$

ج) $ق(\frac{٥}{٢}) = ق(٢)$ د) $ق(\frac{٥}{٢}) > ق(٢)$

٤ الشكل المجاور يمثل منحنى $ق(س)$ ، ما مجموعة حل المتباينة $ق(س) < ٠$ ؟



أ) $[٣، ١]$ ب) $[-\infty، ٢[$

ج) $[-\infty، ٢[\cup]١، ٣[\cup]٣، \infty[$ د) $[-\infty، ٣[\cup]١، \infty[$

٥ إذا كان $ق(س)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة معرفاً على $[أ، ب]$ ، ما أكبر عدد ممكن من النقاط

الحرجة يمكن أن نحصل عليها للاقتران $ق(س)$ ؟

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

٦ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ١- & ٤ \\ ٩ & ٣- & ٦ \\ ١- & ٧ & ٢ \end{bmatrix}$ فما قيمة $أ_{١٢} - أ_{٣١}$ ؟

أ) ٤ ب) ١- ج) ١ د) ٣-

٧ إذا كانت $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ فما مجموعة قيم س؟

(أ) $\{2, 3\}$ (ب) $\{3\}$ (ج) $\{2\}$ (د) $\{2, 3\}$

٨ إذا كانت $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة المصفوفة $5 - (2 + 3) + 27$ ؟

(أ) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

٩ إذا كانت $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ، فما المصفوفة التي تساوي $1 + أ$ ، حيث $أ^{-1}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $أ$ ؟

(أ) و (ب) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$ (د) ٢٧

١٠ إذا علمت أن $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $أ^{-2} - أ$ ؟

(أ) ١٠ (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ (د) ٢٨

١١ استخدم أحمد طريقة كريمر لحل نظام مكون من معادلتين خطيتين في المتغيرين س، ص

فوجد أن: $|أ| = 2 = |أ| = \frac{1}{4} |أ|$ ، فما قيم س، ص على الترتيب؟

(أ) $2, -4$ (ب) $2, -4$ (ج) $1, -2$ (د) $2, \frac{1}{4}$

أجب عن الأسئلة الآتية:

٢ إذا كان $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ ، فما قيم س، ص؟

٣ إذا كانت $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ فجد: (أ) $|أ|$ (ب) $|أ|$ (ج) $(-2) \cdot$

$$٤ \quad \text{جد قيم س التي تجعل} \begin{vmatrix} ٢ & \text{س} & ١ \\ \text{س} & ٣ & \text{س} \\ ٥ & \text{س} & ٤ \end{vmatrix} = ٩ -$$

٥ استخدم طريقة كرامر لحل نظام المعادلات: $٣س + ٢ص = ٤ -$ ، $٥ص + س = ٣ -$

٦ إذا كان ق(س) = جاس + جتاس ، س $\in [٠, \frac{\pi}{٤}]$ أثبت أن ق(س) متزايد على مجاله.

٧ إذا كان ق(س) = $٣س - ٣س - ٢س + ٩س + ٥$ معرفاً في الفترة $[-٢, ٦]$ جد:

أ القيم القصوى المحلية للاقتان ق(س).

ب فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتان ق(س).

ج نقط الانعطاف، لمنحنى الاقتان ق(س).

٨ إذا كان الاقتان ق(س) كثير حدود معرفاً على $[٢, ٦]$ ويقع منحناه في الربع الأول، ومتناقصاً على

مجاله، وكان الاقتان هـ(س) = $٨ - س$ بيّن أن الاقتان ك(س) = $(ق \times هـ)$ متناقص في $[٢, ٦]$.

٩ ما أبعاد مخروط دائري قائم ذات أكبر حجم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها ١٠ سم؟

١٠ سلك طوله ١٨ سم، صنع منه مثلثان كل منهما متساوي الأضلاع، ما طول ضلع كل من المثلثين ليكون

مجموع مساحتهما أصغر ما يمكن؟